جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الثاني

الفرع الصناعي- فرع الحاسوب وتقنية المعلومات

المؤلفون

د. اياد غازي ناصر | **محمد عبد الغفور الجواهري** | **ثائر عبد العباس مطشر**

موفق صالح عمر | **صفية كاظم حسن** | **سعد خضير عباس**

كاوة حسين الياس | **نجم عبد الله حسين الغريري**

الطبعة السادسة

1446 هـ -2024 م


بسم الله الرحمن الرحيم
يؤتي الحكمة من يشاء ومن يؤت الحكمة فقد أوتي خيرا كثيرا
٤٨ ١٢

المقدمة

تعد المناهج أحد أهم حلقات العملية التربوية حيث أن للمناهج دور كبير في إيصال المعلومة إلى المتلقي (الطالب) وأن لتطوير المناهج العلمية دور أساسي مهم في تطوير مجمل العملية التعليمية كما ان التطور هو سنة الحياة الإنسانية المتجددة دوماً والعلم جزء من الحياة المتجددة لذلك لا بد أن تعكس المناهج التطورات الحديثة في مختلف ميادين الحياة حيث أن النمو المعرفي سريع جداً مما يحتم تحديث المناهج بصورة مستمرة وان عملية التحديث والتطوير هي عملية متكاملة.

ان التوجه من قبل وزارة التربية نحو تحسين جودة التعليم فرضته عوامل وحاجات تربوية وعلمية متعددة، وقد تمثل هذا التوجه بالاهتمام بأهمية تحسين نوعية التعليم في المنطقة انسجاما مع مقررات مؤتمر التعليم للجميع الاقليمي العربي (القاهرة، 2000) بأن تكون جودة التعليم في سلم الاولويات.

لقد تناولت أحدث الدراسات والبحوث الجديدة في مجال الذكاء ونمو الدماغ ثورة كبيرة في الطريقة التي نتعلم بها، مما كان له الأثر في تغيير الممارسات داخل الصف المدرسي وطرائق التعليم والتعلم وطرائق التقويم.

إن الحاجة لأحداث تحول نوعي في عملية التعلم هي تحد يواجه المجتمعات على كل مستوى من مستويات التنمية، فالدول الأقل نمواً والنامية والانتقالية والمتطورة عليها جميعاً أن تجد وسائل لجعل التعلم داعماً للتغيير.

والتعلم في كل مكان بحاجة إلى أن يتحول إلى تجربة أكثر ملائمة وحراكاً إذا ما أريد لطلبتنا أن يدخلوا سوق العمل المتغير بالمهارات التي يحتاجونها كي يتمكنوا من المنافسة.

وإدراكاً لكل هذه التحديات وحاجات قطاع التعليم المهني في العراق لتحسين جودة هذا التعليم في مختلف قنواته التعليمية تقوم شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بتنفيذ مبادرة طموحة تهدف إلى إحداث تغيير جوهري في مناهجها الدراسية، تهدف هذه المبادرة في جانبها المتعلق بعلوم الرياضيات إلى إعداد الكتب الدراسية لمادة الرياضيات بما يتلاءم مع المعايير العالمية والنظريات التربوية الحديثة فضلاً عن رفع مستوى تحصيل طلاب التعليم المهني في مادة الرياضيات ليتسنى لهم منافسة أقرانهم من طلبة التعليم العام عن طريق إحداث نقلة نوعية في المناهج من حيث الإعداد العلمي وأسلوب العرض والربط مع التطبيقات الحياتية .

إن هذا الكتاب الذي بين أيديكم هو كتاب الصف الثاني لطلبة الفرع الصناعي وفرع الحاسوب وتقنية المعلومات في التعليم المهني وهو في سبعة فصول يتناول الفصل الاول فيه موضوع الأسس واللوغاريتمات فيما يتناول الفصل الثاني المتتابعات، أما الفصل الثالث فقد تناول طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين تلاه الفصل الرابع الذي تضمن الدوال الدائرية أما الفصل الخامس فقد بحث في الدائرة كأحد القطوع

المخروطية وفي الفصل السادس تناولنا حساب التفاضل كما تناول الفصل السابع الهندسة الفراغية.

لقد تم وضع هذا الكتاب وفقاً للأهداف المقررة، وحاولنا ان نتبع عند تأليفه الطرق الحديثة فكان مجهودنا منصباً على الشرح المفصل لكل مفرداته بما يقربها من الاذهان وتوخينا الاكثار من التمارين العملية التي يصادفها الطالب في حياته العملية.

وهنا لا بد من الأشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل ثلاثة حصص لكل أسبوع وما مجموعه (30 أسبوعاً).

الفصل	الوقت المخصص له
الفصل الأول	أربعة أسابيع
الفصل الثـــاني	أربعة أسابيع
الفصل الثـــالث	أربعة أسابيع
الفصل الـــرابع	خمسة أسابيع
الفصل الخامس	أربعة أسابيع
الفصل السادس	ستـــة أسـابيع
الفصل الســـابع	ثلاثـة أسـابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة التي يقول صاحبها ((إني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده: لو غير هذا لكان أحسن، ولو زيد كذا لكان يستحسن، ولو قدم هذا لكان أفضل، ولو ترك هذا لكان أجمل، وهذا من أعظم العبر للإنسان، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)). آملين من اخواننا المدرسين أن يوافونا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

المؤلفون

الفهرس

الفصل الاول

$$\overbrace{4 \times 4 \times 4}^{3} = 64$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Log}_{4}(64) = 3$$

الأسس واللوغاريتمات

الفصل الاول

الأسس واللوغاريتمات

(Exponential and Logarithm)

البنود
(SECTIONS)

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية	Vocabulary
المتغير x مرفوع لـلقوة n	x^n	*Exponent*
الدالة الاسية	$f(x) = x^n$	*Exponential function*
الدالة اللوغاريتمية	$y = \log_n x$	*Logarithmic function*
اللوغاريتم العشري	$y = \log x$	*Decimal Logarithm*
اللوغاريتم الطبيعي	$y = \ln x$	*Natural Logarithm*
القانون او الدستور	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	*The Constitution*

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مفهوم الاسس
- حل مسائل الاسس عندما تكون اعداد صحيحة او اعداد نسبية
- معنى الدالة الاسية وكيفية تمثيلها بيانيا
- حل المعادلات الاسية
- مفهوم اللوغاريتم وعلاقته بالاس
- الدالة اللوغاريتمية وقوانينها
- اللوغاريتمات العشرية والطبيعية

الفصل الاول

الأسس واللوغاريتمات

(Exponential and Logarithm)

1-1 مفهوم الأس

علمنا من دراستنا السابقة انه يمكننا كتابة المقدار $3 \times 3 \times 3 \times 3$ بالصيغة 3^4 فالعدد 4 يدل على عدد مرات ضرب العدد 3 في نفسه وتقرأ (3 أس 4) أو (القوة الرابعة للعدد 3) ويمكننا تعميم ذلك كالآتي :-

$$a^n = a \times a \times a \times a \times \dots \dots \dots \dots \text{ الى } n \text{ من المرات}$$

مثال 1

1) $2^2 = 2 \times 2 = 4$
2) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
4) $(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 64$

يمكننا أن نستنتج من المثال أعلاه ما يأتي :-

1. عند رفع اي عدد حقيقي موجب الى اية قوة (فردية كانت أم زوجية) يكون الناتج دائماً عدداً حقيقياً موجباً.
2. عند رفع اي عدد حقيقي سالب الى قوة زوجية يكون الناتج عدداً حقيقياً موجباً، أما إذا رفع الى قوة فردية، فأن الناتج يكون عدداً حقيقياً سالباً.

1-1-1 قوانين الأسس عندما تكون اعداداً صحيحة

1. قانون الأسس في الضرب

إذا كان كل من $n, m \in \mathbb{Z}$ وكان $a \in \mathbb{R}$ فأن :-

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

مثال 2

1) $x^3 . x^4 = x^{3+4} = x^7$
2) $5^3 . 5^2 . 5^1 = 5^{3+2+1} = 5^6$
3) $a^2 . b^4 . a^3 = a^{2+3} . b^4 = a^5 . b^4$

2. قانون الأسس في القسمة

إذا كان كل من $m , n \in \mathbb{Z}$ وكان $a \in \mathbb{R}$ فأن :-

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \forall\ m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \forall\ n > m \\ 1 & m = n \end{cases}$$

مثال 3

1) $\frac{a^{17}}{a^3} = a^{17-3} = a^{14}$

2) $\frac{2^{10}}{2^7} = 2^{10-7} = 2^3 = 8$

3) $\frac{3^5}{3^7} = \frac{1}{3^{7-5}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

4) $\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 = 1$

مثال 4

أكتب المقدار الآتي بأبسط صورة :-

$$\frac{x^3 . y^2 . x^4}{x^2 . y . y^5}$$

الحل

$$\frac{x^3 . y^2 . x^4}{x^2 . y . y^5} = \frac{x^7 . y^2}{x^2 . y^6} = \frac{x^5}{y^4}$$

3. قانون الأسس في الرفع :-

إذا كان كل من $m , n \in \mathbb{Z}$ وكان $a \in \mathbb{R}$ فأن :-

$$(a^m)^n = a^{m.n} \;,\quad (a^n)^m = a^{m.n}$$

ويمكننا الاستنتاج مما سبق أن :-

1) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R} ; m , n \in \mathbb{Z}$

2) $(a^m . b^n)^c = a^{mc} . b^{nc} \quad , \forall\, a, b \in \mathbb{R} \;;\; m, n, c \in \mathbb{Z}$

3) $(\frac{a^m}{b^n})^c = \frac{a^{mc}}{b^{nc}} \quad , \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \;;\; m, n, c \in \mathbb{Z}$

مثال 5

اثبت أن :-

$$(7^2)^3 = (7^3)^2$$

الحل

1) $(7^2)^3 = 7^{(2).(3)} = 7^6$

2) $(7^3)^2 = 7^{(3).(2)} = 7^6$

وهكذا يكون $(7^2)^3 = (7^3)^2$

مثال 6

أختصر المقدار الآتي ليكون الناتج بأسس موجبة :-

$$\frac{(x^2)^3\, y^4\, z^6}{x^3\,(y^3)^2 z^5}$$

الحل

$$\frac{(x^2)^3\, y^4\, z^6}{x^3\,(y^3)^2 z^5} = \frac{x^6 .\, y^4 .\, z^6}{x^3 .\, y^6 .\, z^5} = \frac{x^{6-3} .\, z^{6-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 .\, z}{y^2} = \frac{x^3 z}{y^2}$$

مثال 7

بسط المقادير الجبرية الاتية الى ابسط صورة :-

$$1)(a^3 . b^2)^4 \qquad ,2)\ (\frac{a^4}{b^5})^5$$

الحل

1) $(a^3 . b^2)^4 = a^{12} . b^8$

2) $(\frac{a^4}{b^5})^5 = \frac{a^{20}}{b^{25}}$

مثال 8

أختصر المقدار الآتي الى أبسط صورة :-

$$\frac{(x^2 . y^4 . z)^a .\ (x . y^2 . z^3)^{2a}}{(y^2 . z^5)^{3a}}$$

الحل

$$\frac{(x^2 . y^4 . z)^a .\ (x . y^2 . z^3)^{2a}}{(y^2 . z^5)^{3a}} = \frac{x^{2a} . y^{4a} . z^a . x^{2a} . y^{4a} . z^{6a}}{y^{6a} . z^{15a}}$$

$$= \frac{x^{4a} . y^{8a} . z^{7a}}{y^{6a} . z^{15a}}$$

$$= \frac{x^{4a} .\ y^{8a-6a}}{z^{15a-7a}}$$

$$= \frac{x^{4a} . y^{2a}}{z^{8a}}$$

مثال 9

أثبت أن :-

$$\frac{(81)^{n+1}\ .\ (625)^{n}}{(9)^{2n}\ .\ (27).\ (25)^{2n-1}} = 75$$

الحل

$$L.H.S = \frac{(81)^{n+1}\ .\ (625)^{n}}{(9)^{2n}\ .\ (27).\ (25)^{2n-1}} = \frac{(3^4)^{n+1}\ .\ (5^4)^{n}}{(3^2)^{2n}\ .\ (3^3).\ (5^2)^{2n-1}}$$

$$= \frac{3^{4n+4}\ .\ 5^{4n}}{3^{4n}\ .\ 3^3\ .\ 5^{4n-2}} = (3)^{4n+4-4n-3}\ .\ (5)^{4n-4n+2}$$

$$= (3)^1\ .\ (5)^2 = (3).(25) = 75 = R.H.S$$

4. <u>الأس الصفري :-</u>

إذا كان $a \neq 0$ فأن $a^0 = 1$

لتوضيح سبب إعطاء هذا المعنى للأس الصفري لاحظ المثال الآتي :-

مثال 10

على فرض بقاء قانون الأسس في الضرب صحيحاً في حالة كون الأس صفراً، ما قيمة المقدار $(3)^0\ .\ (3)^5$؟

الحل

$$(3)^0\ .\ (3)^5 = 3^{0+5} = 3^5$$

وهذا يعني ان $(3)^0 = 1$

وبالطريقة نفسها يمكننا التوصل الى ان :-

$4^0 = 1$, $5^0 = 1$ ، وهكذا ......

5. <u>الأس الصحيح السالب :-</u>

إذا كان $n \in \mathbb{Z}\ , a \neq 0$ فأن :-

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال 11

على فرض بقاء قانون الأسس في الضرب صحيحاً في حالة كون الأس عدداً صحيحاً موجباً ما قيمة المقدار $(2)^{-3}\ .\ (2)^3$؟

الحل

$(2)^{-3}\ .\ (2)^3 = 2^{-3+3} = 2^0 = 1$ (تعريف الأس الصفري)

ومن هذه النتيجة يمكننا التوصل الى ان المقدار $(2)^{-3}$ يساوي $\frac{1}{(2)^3}$

مثال 12

بسط المقدار $\frac{1}{11^{-2}}$ ليكون الناتج بأسس موجبة.

الحل

$$\frac{1}{11^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{11^{2}}} = 11^{2}$$

وبصورة عامة إذا كان $a \neq 0 \ , n \in \mathbb{Z}$ فأن :-

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^{n}$$

تمارين (1-1)

1. إختصر المقادير الآتية بحيث تكون الأسس في النواتج أعداداً صحيحة موجبةً :-

$a)\ \frac{(5).(5)^{4}.(5)^{6}}{(2)^{2}.(2)^{3}}$

$b)\ \frac{(5).(3^{2}\ .2^{2})}{(2)^{8}.(3)^{7}}$

$c)\ \frac{(-2)^{5}.(-5)^{3}}{(5)^{2}.(-2)^{4}}$

2. ضع كلاً من المقادير الآتية بأبسط صورة :-

$a)\ \frac{m^{2}\ .\ n^{3}}{n^{4}}\ .\ \frac{m^{4}\ .n^{6}}{n^{5}}\ , m, n \neq 0$

$b)\ \frac{(a^{2}.b^{3})^{4}.(b\,.a)^{3}}{(b^{2}.a)^{2}}\ , a, b \neq 0$

$c)\ \frac{(x+y)^{2}\ .\ (x+y)^{3}}{(x+y)}\ , x, y \neq 0$

3. أثبت أن :-

$a)\ \frac{(3)^{2n}}{(3)^{2n+1}} = \frac{1}{3} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$

$b)\ \frac{(7)^{2}.(7)^{3x}}{7^{2(x+1)}} = 7^{x} \qquad \forall\ x \in \mathbb{N}$

2-1-1 تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون اعداداً نسبية

الأس الكسري :- إذا كان $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^{+} : n > 1$

فأن $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ حيث $a \geq 0 , a \in \mathbb{R}$

وبصورة أخرى ومع مراعاة الشروط الواردة اعلاه فان

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

مبرهنة 1

إذا كان عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عددين نسبيين فأن:-

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مبرهنة 2

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عددين نسبيين فأن:-

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

نتيجة 1

اذا كانت $\mathbb{Q}$ مجموعة الاعداد النسبية وكانت $a \in \mathbb{R} , m, n \in \mathbb{Q}$ فأن:-

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ملاحظة :- يتضح لنا من خلال المبرهنتين الاخيرتين أن قوانين الأسس التي استعملناها عندما كانت الأسس اعداداً طبيعيةً أو صحيحةً، تبقى صائبة عندما تكون الأسس أعداداً نسبية. وسوف نقبل المبرهنة الاتية دون الخوض في تفاصيل برهانها:

مبرهنة 3

ليكن كل من a , b عدداً حقيقياً موجباً $n \in \mathbb{N}^{+} : n > 1$ فإن:-

$$1) \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} . b^{\frac{1}{n}}$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

ملاحظة :- إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً فأن المبرهنة تكون صحيحة عندما يكون a او b سالباً.

مثال 13

(تأمل في العمليات التي يتم اجرائها على الاسس فيما يأتي)

$$1) \ (\sqrt[4]{7})^5 = (7^{\frac{1}{4}})^5 = 7^{\frac{5}{4}}$$

$$2) \ (\sqrt{a^3 . b^4})^3 = (a^{\frac{3}{2}} . b^{\frac{4}{2}})^3 = (a^{\frac{3}{2}} . b^2)^3 = a^{\frac{3}{2} . 3} . b^{2.3} = a^{\frac{9}{2}} . b^6$$

تكملة

3. $\sqrt{50} = \sqrt{(25).(2)} = \sqrt{25}\,.\sqrt{2} = \sqrt{5^2}.\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

4. $\sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

5. $\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-1}{10} = -0.1$

6. $\sqrt[3]{(125)^{-1}}\,.\sqrt[4]{0.0016} = (125)^{\frac{-1}{3}}.\left(\frac{16}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = [(5^3)]^{\frac{-1}{3}}.\left(\frac{2^4}{10^4}\right)^{\frac{1}{4}}$

$= (5)^{-1}.\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{5}\,.\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

7. $(\sqrt[4]{a^3}\,.\sqrt{b}\,)^{-4}.(\frac{a^4.b^{\frac{8}{3}}}{c^{-4}})^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{2}})^{-4}.(a^4\,.b^{\frac{8}{3}}\,.c^4\,)^{\frac{3}{4}}$

$= a^{-3}.b^{-2}.a^3.b^2.c^3 = c^3$

8. $(\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} = (\frac{2^3}{3^3})^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{3.\frac{2}{3}}}{3^{3.\frac{2}{3}}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

9. $\sqrt{64\,b^4.c^{-6}} = [(8)^2.b^4.c^{-6}]^{\frac{1}{2}}$

$= (8^2)^{\frac{1}{2}}.(b^4)^{\frac{1}{2}}.(c^{-6})^{\frac{1}{2}} = 8b^2c^{-3} = \frac{8b^2}{c^3}$

مثال 14

بسط المقدار $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ بحيث يكون المقام عدداً نسبياً.

الحل

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

يسمى المقدار $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ في المثال 14 السابق والذي ضربنا به كل من بسط الكسر ومقامـــه (العامل المنسب) او (المرافق) والذي يعرف بأنه الحدانية الجبرية التي تحول مقام الكسر الى عدد نسبي.

مثال 15

بسط المقدار الاتي ليكون مقامه عدداً نسبياً.

$$\frac{7}{2\sqrt{3}+1}$$

الحل

$$\frac{7}{2\sqrt{3}+1}=\frac{7}{2\sqrt{3}+1}\times\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{14\sqrt{3}-7}{(2\sqrt{3})^2-(1)^2}=\frac{14\sqrt{3}-7}{(4).(3)-1}=\frac{14\sqrt{3}-7}{11}$$

مثال 16

أثبت أن :-

$$\left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}}.\sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}}=8$$

الحل

$$L.H.S=\left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}}.\sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{n}{2}}}{(2).2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left(\frac{(2)^{2n+\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{n}{2}}}{(2).2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left(2^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=(2^{3n})^{\frac{1}{n}}=2^3$$

$$=8=R.H.S$$

مثال 17

أثبت أن :-

$$\frac{9^{\left(\frac{1}{2}n+1\right)}+3^{n+1}}{\sqrt{9^{n}}-3^{n-1}}=18$$

الحل

$$L.H.S=\frac{9^{\left(\frac{1}{2}n+1\right)}+3^{n+1}}{\sqrt{9^{n}}-3^{n-1}}$$

$$=\frac{(3^2)^{\left(\frac{1}{2}n+1\right)}+3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^{n}}-3^{n-1}}$$

$$=\frac{(3)^{(n+2)}+3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}}-3^{n-1}}$$

$$=\frac{(3)^{(n+2)}+3^{n+1}}{3^{n}-3^{n-1}}$$

$$=\frac{(3^{n}.3^{2})+(3^{n}.3^{1})}{3^{n}-(3^{n}.3^{-1})}$$

$$=\frac{3^{n}(3^{2}+3^{1})}{3^{n}(1-3^{-1})}$$

$$=\frac{9+3}{1-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{12}{\frac{3-1}{3}}=\frac{12}{\frac{2}{3}}$$

$$=(12).\left(\frac{3}{2}\right)\quad=18=R.H.S$$

تمارين (2-1)

1. جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :-

$a)\ \dfrac{\sqrt[3]{15}\,.\,\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{12}.\,\sqrt[3]{2}}$ $\qquad$ $c)\ \sqrt{\sqrt[3]{729}}$

$b)\ (\sqrt[7]{27})^{\frac{-7}{3}}$ $\qquad$ $d)\ 2Z^0 + (2Z)^0 - 3$

2. بسط كل من المقادير الآتية ليكون الناتج بأسس موجبة :-

$a)\ \dfrac{5.(3)^{n-1} - 3^n}{3^{n+1} + (2).(3)^{n-1}}$ $\qquad$ $c)\ \dfrac{x^3}{y^{-2}} \div \dfrac{x^{-2}}{y^3}$

$b)\ \dfrac{(25)^n.(10)^{n+1}}{(125)^n.(4)^{\frac{n-2}{2}}}$ $\qquad$ $d)\ x^2.y^2(x^{-2} + y^{-2})$

3. أثبت صحة المتطابقات الآتية :-

$a)\ \dfrac{2^{n-2}.4^{n+2}}{8^n} = 4 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$b)\ \dfrac{25^{n+2} - 5^{2n+3}}{(4).\ 5^{2n}} = 5^3 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$c)\ \dfrac{(5).(5)^{2n} - 4.(25)^{n-\frac{1}{2}}}{(2).(5)^{2n+1} + (125)^{\frac{2n}{3}}} = \dfrac{21}{55} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$d)\ \left(\dfrac{4^{n+1}.\ 2^{-n}}{4^{n(n-1)}} \div \dfrac{8^{n+1}}{4^{(n+1)(n-1)}}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$

4. بسط المقادير الآتية ليكون مقام كل منها عدداً نسبياً :-

$a)\ \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3} - 1}$ $\qquad$ $c)\ \dfrac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

3-1-1 الدالة الاسية - تمثيلها بيانياً - خواصها

أطلعت عزيزي الطالب في البنود السابقة على قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحةً أو نسبيةً. وفي هذا البند سوف نقبل القوانين السابقة للأسس عندما تكون أعداداً حقيقية دون الخوض في تفاصيل برهان ذلك.

تعريف

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي الواحد فأن الدالة

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ : f(x)=a^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

تسمى ((الدالة الأسية)) وهي دالة من نوع التقابل ((أي انها دالة شاملة ومتباينة))

ويمكن أعادة صياغة التعريف أعلاه كما يأتي: -

تعرف الدالة الأسية $f_a(x)$ بأنها تطبيق من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}^+$ وقاعدة أقتران هذا التطبيق هي:

$$f_a(x)=a^x : a\in\mathbb{R}^+/\{1\} \quad , x\in\mathbb{R}$$

$1)\ f_7(x)=7^x$

$2)\ f_5(x)=5^x$

$3)\ f_{\sqrt{7}}(x)=(\sqrt{7})^x$

$4)\ f_{\frac{3}{4}}(x)=(\frac{3}{4})^x$

مثال 18

أرسم منحني الدالة الأسية $f_2(x)$ ومنه أرسم منحني الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$.

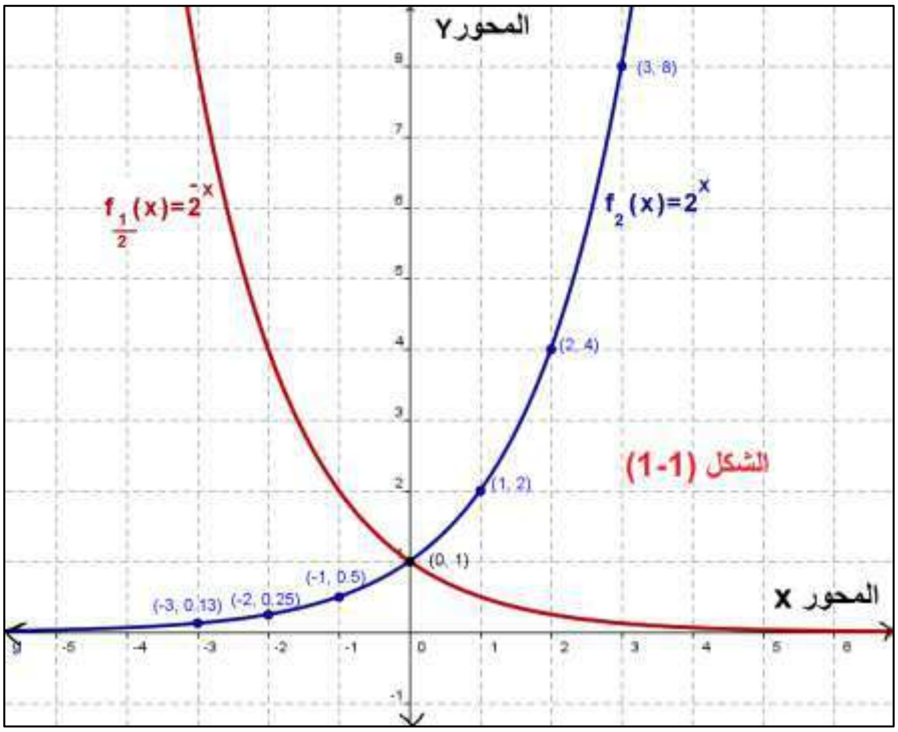
الحل

حيث أن $f_2(x)=2^x$ نقوم بتكوين جدول قيم تعويضية للدالة بهدف استخراج أزواج مرتبة تمثل نقاطاً يمكن أسقاطها على المستوي الاحداثي ، ثم توصيلها للحصول على جزء من التمثيل البياني للدالة.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

تكملة

أما بالنسبة للدالة $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ فأنه من الملاحظ أن الدالتين $f_2(x)$ ، $f_{\frac{1}{2}}(x)$ تناظر أحداهما الاخرى حول المحور y وبذلك نستطيع رسمهما بالاعتماد على هذه الحقيقية ، وكما في الشكل (1-1) الاتي :-



وبالمثل يمكن أن نتناول أية دالة حقيقية $f_a(x)= a^x$ (حيث $a \in \mathbb{R}^+ ,\ a \neq 1$) وكما أسلفنا فأن هذه الدالة تسمى ((الدالة الأسية)) وهي تتمتع بخواص الأسس التي درسناها في البنود السابقة.

أي أنه إذا كان $\in \mathbb{R}^+/\{1\}$ فأن :-

1) $f_m(x).\, f_m(y) = f_m\,(x+y)$

2) $\dfrac{f_m(x)}{f_m(y)} = f_m\,(x-y)$

3) $[f_m(x)]^n \ = \ f_m(nx)$

خواص الدالة الأسية $f_a(x) = a^x$

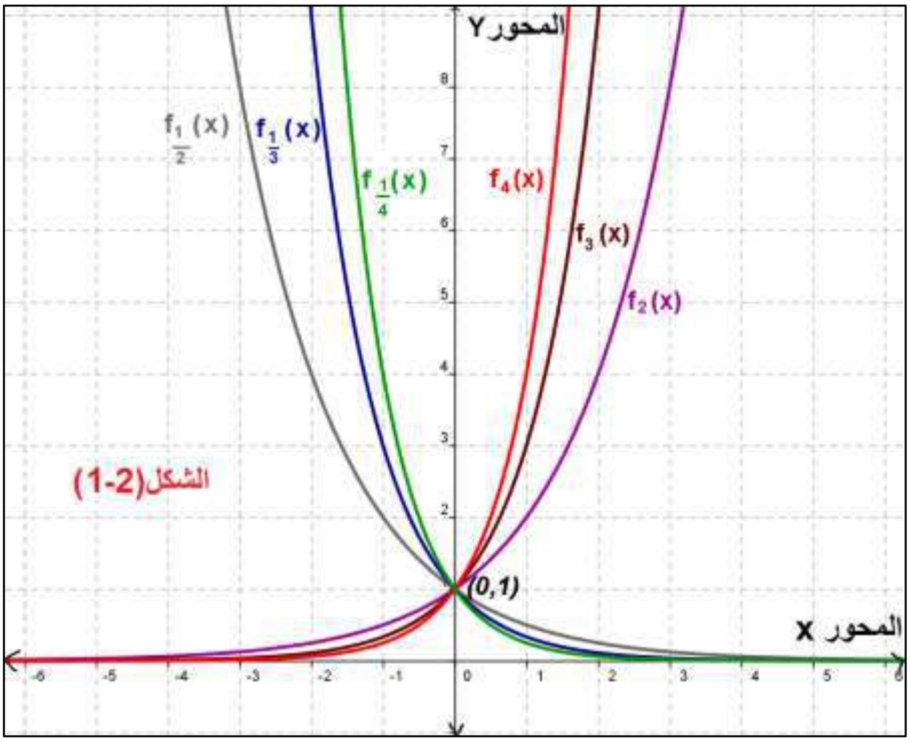
إذا قمنا برسم منحنيات الدوال $f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), \dots$

وكذلك الدوال: $f_{\frac{1}{2}}(x)\ ,\ f_{\frac{1}{3}}(x)\ ,\ f_{\frac{1}{4}}(x)\ ,\ f_{\frac{1}{5}}(x), \dots$

فأننا سوف نجد مجموعتين من المنحنيات :-

1. **دوال تزايديه عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x.**
2. **دوال تناقصية عندما $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x.**

وفي الشكل (2-1) أدناه رسمنا ستة من هذه المنحنيات (لاحظ ان الظاهر في الرسم هو جزء من المنحني وليس المنحني كله) ثلاثة منها يكون فيها $a > 1$ والثلاثة الاخرى فيها $0 < a < 1$ وقد أخترنا قيم a في المجموعة الثانية لتكون مقلوبات قيم a في المجموعة الاولى، كما نلاحظ ان جميع المنحنيات تمر بالنقطة $(0,1)$.



نرى مما سبق إن :-

1. **الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متباينة أي :**

$$\forall\, x , y \in \mathbb{R} , x = y \Rightarrow a^x = a^y$$

2. **الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة شاملة :**

مجال f هو $\mathbb{R}$ ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}^+$ كما إن المدى هو $\{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$ أي إن المدى يساوي المجال المقابل.

3. **الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متقابلة لأنها دالة شاملة ومتباينة.**

4-1-1 المعادلات الأسية

المعادلة الأسية هي المعادلة التي تحتوي على مجهول في الأس، وطريقة حلها تعتمد على الحقيقتين الآتيتين:

1. إذا كان $a^x = a^y$ فأن $x = y$ حيث $a \neq 1$.
2. إذا كان $a^x = b^y$ فأن $x = y = 0$ حيث $a \neq b \neq 1$.

مثال 19

حل المعادلات الأسية الآتية :-

1) $125^x = 5^{x-2}$
2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$.

الحل

1) $[(5)^3]^x = 5^{x-2} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{x-2} \Rightarrow 3x = x - 2$

$\Rightarrow 3x - x = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$

$\therefore S.s = \{-1\}$

2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\therefore S.s = \{-2\}$

مثال 20

حل المعادلات الأسية الآتية :-

1) $16^x = \frac{1}{4}$ 2) $5^{x^2-x} = 25$ 3) $4^{2x-3} = 1$

4) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

الحل

1) $16^x = \frac{1}{4} \Rightarrow [(4)^2]^x = (4)^{-1}$

$\Rightarrow (4)^{2x} = (4)^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

$\boxed{\therefore S.s = \{\frac{-1}{2}\}}$

تكملة

$2)\ 5^{x^2-x} = 25 \Rightarrow 5^{x^2-x} = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$\boxed{\therefore S.s = \{-1\,, 2\}}$

$3)\ 4^{2x-3} = 1 \Rightarrow 4^{2x-3} = 4^0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\boxed{\therefore S.s = \{\frac{3}{2}\}}$

$4)\ 2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12} \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\boxed{\therefore S.s = \{-2, +2\}}$

تمارين (1-3)

1. جد قيمة x في كل من المعادلات الاسية الآتية -:

$a)\ (0.01)^{-x} = 100$

$b)\ (0.1)^{x+1} = 10$

$c)\ x^{5x} = \sqrt{x},\quad x \neq 0$

$d)\ 1 = y^{x^2-3x-4}$

$e)\ 7^{x^2-2x+1} = 49^{x-1}$

$f)\ 2^{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{16}$

$g)\ x^{\frac{3}{4}} = 27$

$h)\ 10^x = \frac{10}{\sqrt{1000}}$

2. مثل الدالة الأسية $f_3(x) = 3^x$ بيانياً ومن المخطط البياني جد قيمة $3^{1.5}$ بصورة تقريبية، وإذا علمت أن $3^x = 5$ جد قيمة x بصورة تقريبية.

2-1 مفهوم اللوغاريتم

لقد عرفنا في موضوع الأسس أن $2^4 = 16$, $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, وهكذا، وبذلك يكون العدد الذي يوضع أساً للأساس 2 ليكون الناتج 4 هو العدد 2 وليكون الناتج 8 هو العدد 3 وليكون الناتج 16 هو العدد 4 كما اننا أوضحنا ان العدد 2 في الامثلة أعلاه يسمى ((الاساس)) بينما كل من الاعداد 4 ،3، 2 تسمى ((الاس)) أما الاعداد 16 ، 8 ، 4 فأنها تسمى ((الناتج)).

فإذا أردنا ان نسأل ((ما هو العدد الذي نجعله أساً للعدد 5 ليكون الناتج 125 فان التسلسل المنطقي الذي سوف نتبعه في الحل هو الآتي: -

$$5^x = 125 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^3 \Rightarrow \quad x = 3$$

أن العدد (3) والذي يمثل أساً للأساس 5 لكي ينتج العدد 125 يطلق عليه أسم ((لوغاريتم)) العدد 125 للأساس 5ويرمز له بالرمز log، كما أننا نعبر رمزياً عن العبارة ((لوغاريتم العدد 125 للأساس 5 يساوي 3)) كما يأتي:- $\log_5 125 = 3$ ، نلاحظ من ذلك ان الصيغة اللوغاريتمية هي صيغة بديلة للصيغة الأسية والعكس صحيح.

1-2-1 الدالة اللوغاريتمية

لقد تعلمنا في البند الخاص بالدالة الأسية إن $y = a^x$ حيث $a \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ ولو تمعنا في الأمثلة التي أوردناها في شرحنا لمفهوم اللوغاريتم لتوصلنا الى ان الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ولذلك يمكننا صياغة التعريف الآتي للدالة الأسية :-

الدالة العكسية للدالة الأسية التي صيغتها العامة $y = a^x$ تسمى الدالة اللوغاريتمية وصيغتها العامة هي $x = \log_a y$ وتقرأ (x يساوي لوغاريتم y للأساسa) أي ان :-

$$y = a^x \Leftrightarrow x = log_a\, y$$

الصيغة الاسية   الصيغة اللوغاريتمية

وبذلك يمكننا الانتقال من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس وكما موضح بالأمثلة

الآتية :-

مثال 21

أكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة لكل من الصيغ الأسية الآتية :-

$1)16 = 4^2$ $2)13 = 13^1$ $3)\ 1000000 = 10^6$

$4)\ 0.00001 = 10^{-5}$

الحل

$1)16 = 4^2 \quad \Rightarrow \quad \log_4 16 = 2$

$2)13 = 13^1 \Rightarrow \log_{13} 13 = 1$

$3)1000000 = 10^6 \quad \Rightarrow \log_{10} 1000000 = 6$

$4)\ 0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow \log_{10} 0.00001 = -5$

مثال 22

أكتب الصيغة الأسية المقابلة لكل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية :-

$1)\ 3 = \log_3 27 \qquad 2)\ -3 = log_5 \frac{1}{125} \qquad 3)1 = log_{10} 10$

الحل

$1)\ 3 = \log_3 27 \Rightarrow 27 = 3^3$

$2)\ -3 = \log_5 \frac{1}{125} \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^{-3}$

$3)\ 1 = \log_{10} 10 \Rightarrow 10 = 10^1$

ملاحظات :-

1. لوغاريتم العدد للأساس نفسه يساوي 1 أي ان $\log_x x = 1$.
2. لوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس عدا الواحد يساوي صفر أي ان

$\log_a 1 = 0 \quad , a \neq 1$.

3. أن مجال الدالة اللوغاريتمية هو $\mathbb{R}^+$ ويترتب على ذلك أن العدد (صفر) وأي عدد سالب ليس له لوغاريتم.

مثال 23

جد قيمة المجهول في كل مما يأتي :-

$1)\ log_4 x = 3 \ , \qquad 2)\ log_x 64 = 6 \ , \qquad 3)\ log_{125} 25 = x$

الحل

نحول الصيغة اللوغاريتمية الى الصيغة الأسية ثم نجد قيمة x

$1) x = 4^3 \Rightarrow x = 64$

$2) 64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6 \Rightarrow x = 2$

$3) 25 = 125^x \Rightarrow 5^2 = 5^{3x} \Rightarrow 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

مثال 24

جد ناتج ما يأتي :-

$1)\ log_2 \sqrt[3]{2}\ ,\qquad 2)\ log_{\sqrt[3]{3}} 81\ ,\qquad 3)\ log_{10} 0.001$

الحل

نحول الصيغة اللوغاريتمية الى الصيغة الأسية ثم نجد قيمة x

$1)\ log_2 \sqrt[3]{2} = x$ نفرض $\Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = 2^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$2)\ log_{\sqrt[3]{3}} 81 = y$ نفرض $\Rightarrow 81 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^y$

$\Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3}y} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{y}{3}} \Rightarrow 4 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 12$

$3)\ log_{10} 0.001 = z$ نفرض $\Rightarrow 0.001 = 10^z$

$\Rightarrow \frac{1}{1000} = 10^z \Rightarrow 10^{-3} = 10^z \Rightarrow z = -3$

مثال 25

جد لوغاريتم العدد $\frac{1}{625}$ للأساس 5.

الحل

نفرض $\log_5 \frac{1}{625} = x \Rightarrow \frac{1}{625} = 5^x \Rightarrow \frac{1}{5^4} = 5^x \Rightarrow 5^{-4} = 5^x \Rightarrow x = -4$

مثال 26

ما العدد ألذي لوغاريتمه للأساس (0.01) يساوي 2 ؟

الحل

نفرض إن العدد $= y$

$log_{0.01} y = 2$

$y = (0.01)^2 = 0.0001$

مثال 27

جد لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$.

الحل

نفرض ان قيمة لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$ يساوي x

$log_{2\sqrt{2}} 16 = x$

$(2\sqrt{2})^x = 16 \Rightarrow (2.2^{\frac{1}{2}})^x = 2^4$

$\Rightarrow 2^{\frac{3}{2}x} = 2^4 \quad \Rightarrow \frac{3}{2}x = 4 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

تمارين (4-1)

1. ضع كل مما يأتي بالصيغة اللوغاريتمية :-

a) $125 = 5^3$ b) $4 = (\sqrt{2})^4$ c) $0.000001 = 10^{-6}$

d) $a^0 = 1$ e) $2 = 8^{\frac{1}{3}}$

2. ضع كل مما يأتي بالصيغة الأسية :-

a) $\log_{\sqrt{5}} 3125 = 10$ b) $\log_a a = 1$ c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$ e) $\log_{10} 0.001 = -3$

3. احسب قيم اللوغاريتمات الآتية :-

a) $\log_{10} 0.01$ b) $\log_7 1$

c) $\log_{10} 0.000001$ d) $\log_3 3$

4. ما قيمة x في كل مما يأتي :-

a) $\log_x 0.001 = 1$ b) $\log_{10}(2x+3) = 1$

c) $\log_x \frac{1}{100} = -2$ d) $\log_2 64 = 10 - 2x$

e) $\log_{0.001} x = 2$ f) $\log_2 32 + \log_{25} 625 - \log_3 81 = x$

2-2-1 خواص اللوغاريتمات

$$1)\ log_a(x.y.z\ ....) = log_a x + log_a y + log_a z + \cdots$$

مثال 28

$1)\log_2[(5).(7)] = \log_2 5 + \log_2 7$

$2)\log_{\sqrt{2}}[(3).(11)] = \log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} 11$

$3)\log_7 30 = \log_7[(2).(3).(5\ )] = \log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 5$

مثال 29

أثبت أن :- $\log_{10}\frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10}\frac{1}{8} = 0$

الحل

$$L.H.S = log_{10}\frac{8}{3} + log_{10} 3 + \log_{10}\frac{1}{8}$$

$$= log_{10}\left(\frac{8}{3}.(3).\frac{1}{8}\right) = log_{10} 1 = 0 = R.H.S$$

$$2)\ log_a\frac{x}{y} = log_a x - log_a y$$

مثال 30

مثال توضيحي على خاصية 2

$a)\log_3\frac{x}{5} = \log_3 x - \log_3 5$

$$b)\log_5\frac{6}{11} = \log_5 6 - \log_5 11 = \log_5[(2).(3)] - \log_5 11$$

$$= \log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 11$$

مثال 31

أثبت أن :-

$a)\ log_{10}\frac{27}{32} + log_{10}\frac{10}{3} - log_{10}\frac{15}{16} = log_{10} 3$

$b)log_a\frac{6}{5} + log_a\frac{5}{66} - log_a\frac{132}{121} + log_a 12 = 0$

الحل

$$a)L.H.S = log_{10}\frac{27}{32} + log_{10}\frac{10}{3} - log_{10}\frac{15}{16} = log_{10}\left(\frac{27}{32}.\frac{10}{3} \div \frac{15}{16}\right)$$

$$= log_{10}\left(\frac{27}{32}.\frac{10}{3}.\frac{16}{15}\right) = log_{10} 3 = R.H.S$$

$$b)L.H.S = log_a\frac{6}{5} + log_a\frac{5}{66} - log_a\frac{132}{121} + log_a 12$$

$$= log_a\frac{\frac{6}{5}.\frac{5}{66}.12}{\frac{132}{121}}$$

$$= log_a\left(\frac{12}{11}.\frac{121}{132}\right) = log_a 1 = 0 = R.H.S$$

مثال 32

إذا كان $\log_{10} 5 = 0.699$ فما قيمة :-

$1)\ \log_{10}\frac{1}{5}$, $2)\ \log_{10}\frac{1}{2}$

الحل

$$1)\ log_{10}\frac{1}{5} = log_{10} 1 - log_{10} 5 = 0 - log_{10} 5 = -0.699$$

$$2)\ log_{10}\frac{1}{2} = log_{10}(0.5) = log_{10}\frac{5}{10} = log_{10} 5 - log_{10} 10 = 0.699 - 1 = -0.301$$

$$3)\ log_a x^n = n.log_a x$$

مثال 33

$1)\ \log_4 5^{-3} = -3\log_4 5$

$2)\ \log_5 \sqrt{7} = \log_5 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_5 7$

$$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a},\qquad b \neq 1$$

$3)\ \log_7 5 = \frac{\log_b 5}{\log_b 7}\ (b \neq 1)$

مثال 34

أختصر المقدار الآتي :- $\log_5 7 . \log_7 11 . \log_{11} 3 . \log_3 5$

الحل

$$log_5 7 . log_7 11 . log_{11} 3 . log_3 5 = \frac{log_b 7}{log_b 5} . \frac{log_b 11}{log_b 7} . \frac{log_b 3}{log_b 11} . \frac{log_b 5}{log_b 3} = 1$$

ملاحظة :-

إذا تساوى لوغاريتم عددين للأساس نفسه فأن العددين متساويان، والعكس صحيح. أي :-

$$log_a x = log_a y \Leftrightarrow x = y$$

مثال 35

حل المعادلة اللوغاريتمية الآتية :-

$$\log_5(2x+1) + \log_5(x-2) = \log_5 7$$

الحل

في هذا المثال لم تعط مجموعة التعويض ولذلك يقتضي الامر أيجادها أولاً وكما يأتي :-

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow \{x : x > \frac{-1}{2}\}$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow \{x : x > 2\}$$

تكملة

ولذلك فأن مجموعة التعويض للمعادلة اللوغاريتمية ستكون :-

$$\{x: x > \frac{-1}{2}\} \cap \{x: x > 2\} = \{x: x > 2\}$$

والان نعاود حل المعادلة :-

$$log_5(2x+1) + log_5(x-2) = log_5 7$$

$$log_5(2x+1).(x-2) = log_5 7$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow (2x+3)(x-3) = 0$$

أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \notin \{x: x > 2\}$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$$\boxed{\therefore S.s = \{3\}}$$

3-2-1 اللوغاريتمات العشرية (لوغاريتمات الاعداد للأساس 10)

اللوغاريتمات العشرية هي اللوغاريتمات التي يكون أساسها العدد 10 ولأنها تستعمل كثيراً في الحسابات العلمية لذا أتفق علماء الرياضيات على عدم كتابة الأساس 10 عند استعمالها، فمثلا $\log 7$ يقصد بها $\log_{10} 7$.

لاحظ الصيغتين الأسية واللوغاريتمية الآتية التي تبين لنا لوغاريتمات القوى الصحيحة للإساس 10

$$10000 = 10^4 \Rightarrow \log 10000 = 4$$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow \log 1000 = 3$$

$$100 = 10^2 \Rightarrow \log 100 = 2$$

$$10 = 10^1 \Rightarrow \log 10 = 1$$

$$1 = 10^0 \Rightarrow \log 1 = 0$$

$$0.1 = 10^{-1} \Rightarrow \log 0.1 = -1$$

$$0.01 = 10^{-2} \Rightarrow \log 0.01 = -2$$

$$0.001 = 10^{-3} \Rightarrow \log 0.001 = -3$$

و هكذا...

مما سبق نستنتج ما يأتي :-

1. **لوغاريتمات القوى الصحيحة للإساس 10 هي أعداد صحيحة ((موجبة)) إذا كانت القوى أكبر من الواحد و((سالبة)) إذا كانت القوى أصغر من الواحد.**

2. الدالة $y = \log x$ (وهي دالة تقابل من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}^+$) ، هي دالة متزايدة ونقصد بذلك أن قيمة الدالة $\log x$ تتزايد مع ازدياد قيمة دالة x ويترتب على ذلك ان لوغاريتم العدد يزداد بازدياد العدد ويصغر بصغره.
3. إذا كانت $x \in \{x: x \leq 0\}$ فأن $\log x$ تكون غير معرفة. (أي ان العدد السالب والصفر ليس لهما لوغاريتم).
4. إذا كانت $x \in (0, 1)$ فأن $\log x \in \{y: y < 0\}$ ((أي أن اللوغاريتمات تكون سالبة)).
5. عندما $x = 1$ فأن $\log x = 0$.
6. إذا كانت $x \in \{x: x > 1\}$ فأن $\log x \in \{y: y > 0\}$ ((أي أن اللوغاريتمات تكون موجبة)).

4-2-1 اللوغاريتمات الطبيعية

تعرفنا في البند السابق على اللوغاريتمات العشرية عندما كان الأساس10 . والآن سنتعرف على اللوغاريتمات التي أساسها العدد الذي يرمز له بالرمز (e) الذي قيمته (2.71828) ويسمى العدد النيبيري.

ملاحظة :-

خواص اللوغاريتمات الطبيعية هي خواص اللوغاريتمات العشرية نفسها.
تسمى اللوغاريتمات بدلالة الأساس (e) باللوغاريتمات الطبيعية وهي تظهر في عدة مجالات وتطبيقات علمية متعددة قد تتعرف عليها في دراستك المستقبلية.

يعرف اللوغاريتم الطبيعي للعدد y بالصيغة $\ln y$ لتمييزه عن اللوغاريتم الاعتيادي (ألعشري) $(\log y)$ أما الرمز المختصر $(\ln)$ فهو مأخوذ من كلمة $(natural)$ والتي تعني (طبيعي).

ومن تعريف الدالة اللوغاريتمية لو أستبدلنا الأساس a بالأساس e فأننا سوف نحصل على :-

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$$

نتيجة 1

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \ln e^x = x$$

البرهان

$$L.H.S = \ln e^x = x \ln e = x.1 = x = R.H.S$$

نتيجة 2

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} = \frac{\ln x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \quad , a > 0$$

البرهان

ليكن $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على :-

$$\ln x = \ln a^y \Rightarrow \ln x = y . \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \therefore \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

مثال 36

جد قيمة المقدار :- $\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15}$

الحل

$$\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}} = \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$= \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 15}$$

$$= \frac{\ln(3 \times 5)}{\ln 15}$$

$$= \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

تمارين (5-1)

1. إختصر كل من المقادير الآتية :-

a) $\log_{10} \frac{5}{16} - \log_{10} \frac{8}{27} + \log_{10} \frac{32}{9}$

b) $\log_5 15 + \log_5 75 - \log_5 9$

c) $\log_{10}(x^2 - 9) - \log_{10}(x - 3) + \log_{10} \frac{x - 3}{x + 3}$

d) $\frac{\log_{10} \sqrt{125} + \log_{10} \sqrt{27} - \log_{10} \sqrt{8}}{\log_{10} 15 - \log_{10} 2}$

2. جد قيمة المجهول في كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10} \frac{55}{6} - \log_{10} x = \log_{10} \frac{11}{2} + 1$

b) $\log_{10} x + \log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 = 12$

c) $\log_3 81 = 7 - 3y$

d) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}}(x - 1) = 2$

3. أثبت صحة المتطابقات اللوغاريتمية الآتية :-

$$a)\ \log_{10}\frac{9}{8}-\log_{10}\frac{18}{40}+\log_{10}\frac{72}{18}=1$$

$b)\ \log_{10}0.1+\log_{10}18-\log_{10}6-\log_{10}3=-1$

$c)\ \log_{10}3+\log_{10}270-2\log_{10}9=1$

$d)\ \log_b 30-\log_b 310-\log_b 31+\log_b 961-\log_b 3=0 \quad ,(b\neq 1)$

4. حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

$a)\ \log_{10}(3x+1)+\log_{10}(3x-7)-\log_{10}2=1$

$b)\ \log_a(10-y)+\log_a(y+2)=\log_a 11 \quad y\in\{10>y>2\}$

$c)\ \log_2(x+14)-\log_2(x-5)=1$

$d)\ \log_5(n+1)+\log_5(2n-1)=1$

5. إذا علمت ان $\log_{10}2=0.3010$ ، $\log_{10}3=0.4771$ فاحسب قيمة كل مما يأتي:-

$a)\log_{10}0.3$ $\qquad$ $b)\log_{10}\frac{64}{27}$

$c)\log_{10}60$ $\qquad$ $d)\log_{10}\frac{81}{\sqrt{8}}$

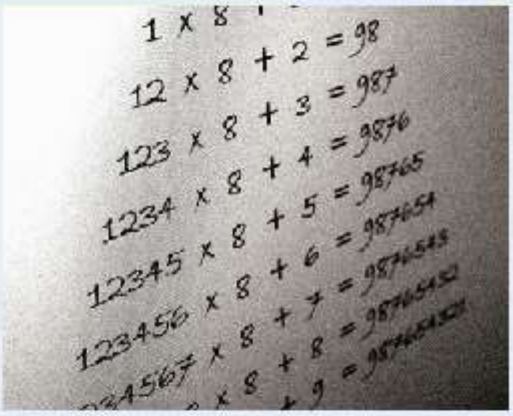
6. أثبت ان :-

$$a)\ \frac{1}{\log_a abc}+\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}=1$$

$b)\ \log_{10}\left(\frac{40}{9}\right)+2(2\log_{10}5+\log_{10}6)=5$

7. إذا كان $b=\log_a c$, $a=\log_c b$ اثبت ان :- $\log_b a=\frac{1}{ab}$.

الفصل الثاني



المتتابعات

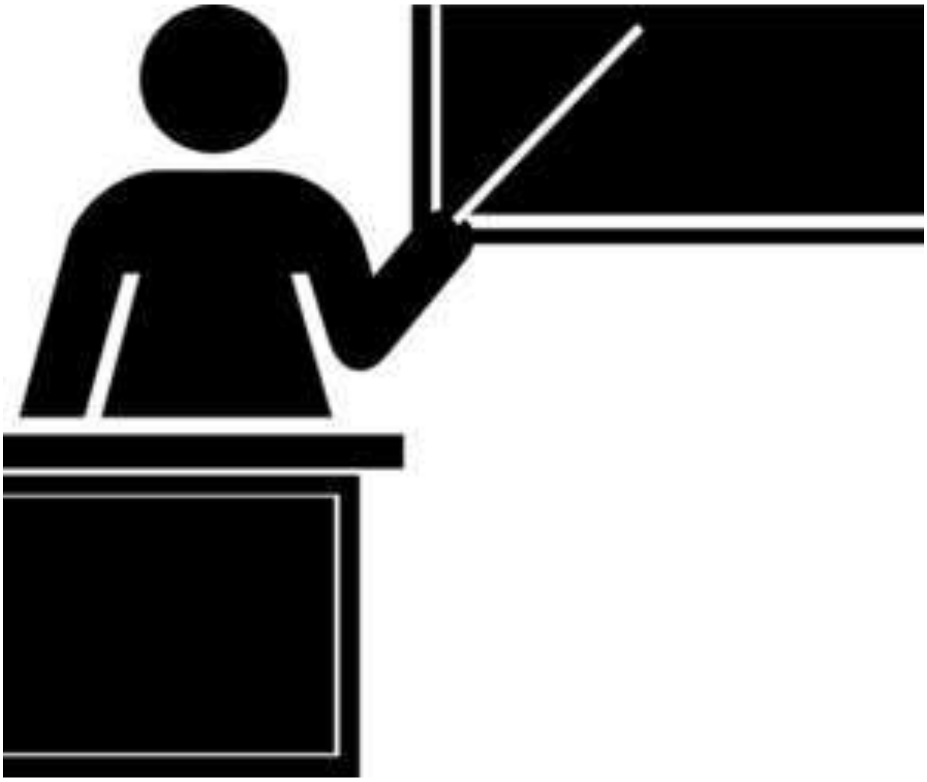
الفصل الثاني
المتتابعات
(*Sequences*)

البنود
(SECTIONS)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
First term	a	الحد الأول للمتابعة الحسابية والهندسية
common difference of an arithmetic sequence	$d = U_{n+1} - U_n$	أساس المتتابعة الحسابية
common ratio of an geometrical sequence	$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$	أساس المتتابعة الهندسية
the nth Term of an arithmetic sequence	$U_n = a + (n-1).d$	قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية
the nth Term of an geometrical sequence	$U_n = a.r^{n-1}$	قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية
sum of a certain number of terms of an arithmetic sequence	$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$	قانون مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأخير
sum of a certain number of terms of an arithmetic sequence	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1).d]$	قانون مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأساس
sum of a certain number of terms of a geometrical sequence	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$	قانون مجموع المتتابعة الهندسية

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مفهوم المتتابعة
- تعريف المتتابعة العددية وحدها العام
- مفهوم المتتابعة الحسابية وقانون الحد العام لها
- كيفية ادخال اوساط حسابية بين عددين معينين
- ايجاد مجموع المتتابعة الحسابية المنتهية
- مفهوم المتتابعة الهندسية وقانون الحد العام لها
- كيفية ادخال اوساط هندسية بين عددين معينين
- ايجاد مجموع المتتابعة الهندسية المنتهية



الفصل الثاني

المتتابعات

(Sequences)

1-2 المقدمة

المتتابعات هي دوال يكون مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة $(\mathbb{N}^+)$ او مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ($\mathbb{Z}^+$) ، او يكون مجالها مجموعة جزئية ومرتبة من $(\mathbb{Z}^+)$ او $(\mathbb{N}^+)$ ، أي $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ أو $n \in \mathbb{Z}^+$.

والمجال المقابل اي المدى هو مجموعة غير خالية. وقد تكون المتتابعات منتهية (Finite Sequences) او غير منتهية (Infinite Sequences) .

وكما ان مجموعة الأعداد الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ وهي مجموعة الأعداد الموجبة وان المجموعة الكاملة $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ وهي مجموعة الاعداد الموجبة والصفر ، وأما مجموعة الأعداد الصحيحة فهي $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ اي انها مجموعة الأعداد السالبة والموجبة مع الصفر حيث ان $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ، وسنأخذ في الفصل هذا المتتابعات بشكل عام والمتتابعات الحسابية والهندسية واللتين لهما تطبيقات في المجالات الاقتصادية وعلم الأرض (الجيولوجيا) وغيرها من المجالات . مما سبق يمكن ان نضع تعريفاً للمتتابعة كالاتي :-

2-2 تعريف المتتابعة وحدها العام

المتتابعة (Sequence) هي دوال يكون مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية الموجبة $(\mathbb{N}^+)$او مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ($\mathbb{Z}^+$) ، او مجموعة جزئية من $(\mathbb{Z}^+)$ او $(\mathbb{N}^+)$. ومجالها المقابل هو مجموعة جزئية غير خالية.

مثال: لتكن $f(n) = n + 2$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ أو $n \in \mathbb{Z}^+$

فإنه عندما $n = 1$ فإن $f(1) = 1 + 2 = 3$

وعندما $n = 2$ فإن $f(2) = 2 + 2 = 4$

وعندما $n = 3$ فإن $f(3) = 3 + 2 = 5$ وهكذا ...

فنرى ان الاعداد الناتجة هي المجال المقابل أي المدى وتكتب بالصورة $\langle 3, 4, 5, \dots \rangle$ وتسمى بالمتتابعة وإذا رمزنا لـ $f(n)$ بالرمز U_n تصبح الدالة المعطاة بالشكل $U_n = n + 2$ وهذا الأخير هو القاعدة التي من خلالها وجدنا النواتج أي المجال المقابل (المدى) ونسمي $U_n = n + 2$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ او $n \in \mathbb{Z}^+$ بالحد النوني او الحد العام *(General term)* أو *(the nth Term)* ، ونكتب المتتابعة في المثال السابق بالشكل $U_n = \langle 3, 4, 5, \dots \rangle$ ، وبصورة عامة تكتب المتتابعة كالاتي:-

$< U_n > = < U_1, U_2, U_3, \dots, U_n >$ حيث U_1 الحد الأول و U_2 الحد الثاني ... وهكذا.

مثال 1

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة التي حدها العام $U_n = 2n + 2$ حيثُ $n \in \mathbb{Z}$

الحل

الحد الأول $U_1 = 2 \times 1 + 2 = 4$

الحد الثاني $U_2 = 2 \times 2 + 2 = 6$

الحد الثالث $U_3 = 2 \times 3 + 2 = 8$

الحد الرابع $U_4 = 2 \times 4 + 2 = 10$

الحد الخامس $U_5 = 2 \times 5 + 2 = 12$

المتتابعة هي: $< U_n >=< 4, 6, 8, 10, 12 >$

مثال 2

اكتب المتتابعة الآتية مكتفياً بالحدود الستة الأولى ، حيث حدها العام $U_n = 5$ حيثُ $n \in \mathbb{Z}$

الحل

$U_1 = 5, U_2 = 5 \ , U_3 = 5 \ , U_4 = 5 \ , U_5 = 5 \ , U_6 = 5$

$\therefore$ المتتابعة $< U_n >=< 5, 5, 5, 5, 5, 5 >$

ملاحظة :- في المثال 2 نلاحظ ان الحدود جميعها متساوية فتُسمى مثل هذه المتتابعة بالمتتابعة الثابتة.

تمارين (2-1)

1. اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الآتية :-

a) $< U_n >=< n - 1 >$

b) $< U_n >=< \frac{1}{n} >$

c) $< U_n >=< (-1)^2 >$

d) $< U_n >=< n^2 >$

2. إذا كان $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$: فأكتب المتتابعة حيثُ : $U_n = 3n - 5$

3-2 المتتابعة الحسابية Arithmetic Sequence

تعريف

هي المتتابعة التي يكون الفرق بين كل حدين متتالين من حدودها عدد ثابت يطلق عليه اساس المتتابعة ويرمز له بالرمز (d) اما حدها الاول فيرمز له بالرمز(a).

وبذلك تكون المتتابعة الحسابية والتي تسمى ايضاً بالمتتابعة العددية هي:

$$< \ U_n \ > = < \ a \,, a + d \,, a + 2d \,, \ldots \ >$$

حيث $U_1 = a$ يسمى الحد الأول و $U_2 = a + d$ يسمى الحد الثاني و$U_3 = a + 2d$ يسمى الحد الثالث ، كما ذكرنا ان الأساس هو حاصل طرح حدين متتالين من حدودها فيكون الأساس.

$$d = U_{n+1} - U_n$$

1-3-2 الحد العام للمتتابعة الحسابية General Term for Arithmetic Sequence

كما علمنا ان:

$$U_1 = a$$

$$U_2 = a + d$$

$$U_3 = a + 2d$$

$$U_n = a + (n-1)\, d$$

وبذلك سيكون الحد العام للمتتابعة الحسابية بالشكل:

$$U_n = a + (n-1).\, d \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \ \ or \ \ n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال 3

لاحظ المتتالية الحسابية الاتية $< 1, 5, 9, 13, 17, \ldots >$ فيها الحد الأول هو $a = 1$

$$d = U_2 - U_1 \ \Rightarrow \ d = 5 - 1 = 4$$

$$d = U_3 - U_2 \ \Rightarrow \ d = 9 - 5 = 4$$

وهكذا... ولإيجاد المتتابعة الحسابية نستخدم طريقة الحد العام او طريقة إضافة الأساس للحد الأول لنحصل على الحد الثاني وإضافة الأساس للحد الثاني لنحصل على الحد الثالث وهكذا ...

مثال 4

اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الأول يساوي (2) وأساسها (3) مَكتفياً بالحدود الخمسة الأولى.

الحل

نستخدم طريقة الحد العام :

$U_1 = a = 2$

$U_2 = a + d = 2 + 3 = 5, \ U_3 = a + 2d = 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8$

$U_4 = a + 3d = 2 + 3 \times 3 = 2 + 9 = 11 \,,$

$U_5 = a + 4d = 2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$

∴ المتتابعة هي: $< \ 2 \,, 5 \,, 8 \,, 11 \,, 14 \ >$

مثال 5

متتابعة حسابية حدها الأول يساوي (7) وحدها السادس يساوي (-3) جد أساسها

الحل

لدينا الحد الأول $a = 7$ ولدينا قيمة الحد السادس $U_6 = -3$

لإيجاد قيمة الاساس d نستخدم قانون الحد العام

$$U_6 = a + 5d$$

$$-3 = 7 + 5d \Rightarrow -3 - 7 = 5d \Rightarrow -10 = 5d \Rightarrow d = \frac{-10}{5} \Rightarrow d = -2$$

مثال 6

جد الحد السابع في المتتابعة الحسابية $< -2, 3, 8, \dots >$

الحل

لدينا الحد الأول $a = -2$ و $n = 7$ والأساس $d = U_3 - U_2 = 8 - 3 = 5$

قانون الحد العام $U_n = a + (n-1)d$

$$U_7 = -2 + (7-1) \times 5$$

$$U_7 = -2 + 6 \times 5 \Rightarrow U_7 = -2 + 30 \Rightarrow U_7 = 28$$

مثال 7

في معملٍ ما يوجد (6) محركات كهربائية موضوعة بشكلٍ متسلسل حيثُ تزيد قدرة المحرك بمقدار (2) حصان عن قدرة المحرك الذي قبلهُ . فإذا كانت قدرة المحرك الأول (2) حصان فكم تبلغ قدرة المحرك السادس ؟

الحل

سيكون المحرك الأول هو الحد الأول اي ان $a = 2$ وستكون زيادة قدرة المحرك عن الذي قبلهُ هي الأساس اي $d = 2$ وبذلك ستكون قدرة المحرك السادس هي:

$$U_6 = a + 5d$$

$$U_6 = 2 + 5 \times 2 = 12$$ حصان

ملاحظة :- عندما يُطلب في السؤال (إيجاد عدد حدود المتتابعة) او (ما رتبة الحد الذي قيمتهُ) هذا يعني ان قيمة n مجهولة.

مثال 8

جد عدد حدود المتتابعة الحسابية $< 13, 11, 9, \dots, -5 >$

الحل

$$U_n = -5 \quad , a = 13, \quad n = ?$$

قانون الحد العام $U_n = a + (n-1).d$

$$d = u_2 - u_1 \Rightarrow d = 11 - 13 = -2$$

$$\therefore -5 = 13 + (n-1) \times -2$$

$$-5 = 13 - 2n + 2 \Rightarrow -5 = 15 - 2n \Rightarrow -5 - 15 = -2n$$

$$\therefore -20 = -2n \Rightarrow n = \frac{-20}{-2} = 10$$

اي ان عدد حدود المتتابعة هو عشرة حدود.

مثال 9

في السيارة تحتوي علبة السرع $(gear\ box)$ على 5 سُرع فإذا كانت تقطع $(20\ km/h)$ في السرعة الأولى وكان هناك زيادة ثابتة تبلغُ $(25\ km/h)$ ابتداءً من السرعة الأولى ، فكم تقطع إذا كانت في السرعة الخامسة ؟

الحل

لاحظ ان السيارة فيها خمس سُرع اي خمسة حدود وسيكون الحد الأول 20 وان الزيادة ستُمثل اساس المتتابعة أي 25 وفي السؤال طلب ايجاد السرعة الخامسة اي الحد الخامس:

$$U_5 = a + 4d$$

$$U_5 = 20 + 4 \times 25 = 20 + 100 = 120\ km/h$$

4-2 الأوساط الحسابية Arithmetic Means

هي الأعداد التي تتوسط عددين او حدين معلومين (مذكورين) كأن ندخل الأعداد المُرتبة $b, c, d, \dots$ بين العددين a, f المذكورين اي تصبح $< a, b, c, d, \dots, f >$ فإن الأوساط الحسابية هي الأعداد $b, c, d, \dots$ ، حيث ان :-

عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + 2

مثال 10

ادخل ستة اوساط حسابية بين العددين 12 , 40

الحل

عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + 2

عدد الحدود = 2 + 6 = 8

∴ الحد الأخير هو U_8 ويساوي 40 والحد الأول هو $a = 12$ وسنجد الأساس d

$$U_8 = a + 7d$$

$$40 = 12 + 7d \Rightarrow 40 - 12 = 7d \Rightarrow 28 = 7d \Rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

∴ الأوساط هي ابتداءً من الحد الثاني U_2 والى الحد السابع U_7 وكما يأتي:

$$U_2 = 16,\ U_3 = 20,\ U_4 = 24,\ U_5 = 28,\ U_6 = 32,\ U_7 = 36$$

اي ان الأوساط هي الأعداد : $16, 20, 24, 28, 32, 36$ بينما المتتابعة هي:

$$< 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 >$$

5-2 مجموع المتتابعة الحسابية المنتهية Sum of the Arithmetic Sequence

لتكن $< U_n >$ متتابعة حسابية: $< Un >=< U_1, U_2, U_3, \dots, U_n >$ فإذا رمزنا S_n لمجموع n حداً منها ابتداءً من حدها الأول والى الحد النوني فيكون :

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (U_n - 2d) + (U_n - d) + U_n \dots (1)$$

وإذا كتبنا مجموع n حداً من هذه المتتابعة وابتداءً من الحد النوني الى الحد الأول سيكون:

$$S_n = U_n + (U_n - d) + (U_n - 2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a \quad \dots.(2)$$

وبجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على :

$$S_n + S_n = (a + U_n) + (a + d + U_n - d) + \dots + (U_n - d + a + d) + U_n + a$$

$$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + \dots + (a + U_n) + (a + U_n)$$

$$2S_n = n[a + U_n] \Rightarrow Sn = \frac{n}{2}[a + U_n]$$

∴ هذا قانون ايجاد مجموع عدد معين من حدود المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والحد الأخير.

وكما نعلم ان $U_n = a + (n-1)d$ فيصبح القانون كما يأتي :

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1).d]}$$

ونستخدم هذا القانون لإيجاد مجموع عدد معين من حدود المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأول والأساس.

مثال 11

جد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة الحسابية $< 10, 14, 18, \dots, 38 >$

الحل

$$a = 10, \quad d = 14 - 10 = 4, \quad U_n = 38, \quad n = 8$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1).d]$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2 \times 10 + (8-1) \times 4]$$

$$S_8 = 4[20 + 7 \times 4]$$

$$S_8 = 4 \times 48 = 192$$

تمارين (2-2)

1. اختر الجواب الصحيح لكل مما يأتي :-

أ) المتتابعة $< 3n+2 >$

1) حدها الأول 4 واساسها 2
2) حدها الأول 5 واساسها 3
3) حدها الأول 2 واساسها -3
4) حدها الأول 1 واساسها -1

ب) المتتابعة الحسابية $< -2 , x , 6 , 10 >$ فإن قيمة x هي:

1) 1
2) 4
3) -1
4) 2

2. اكتب المتتابعة الحسابية مُكتفياً بالحدود الخمسة الأولى لكل مما يأتي :-

أ) الحد الأول $a = 2$ واساسها $d = 4$

ب) الحد الأول $a = -4$ واساسها $d = 6$

3. اكتب الحد الثالث عشر لمتتابعة حسابية حدها الأول (3) وأساسها (4).

4. ادخل ثمانية اوساط حسابية بين العددين $2 , 29$

5. جد عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الزوجية التي اقل من (100) ثم جد مجموعها.

6. ما رتبة الحد الذي قيمتهُ (15) في المتتابعة الحسابية $< -7 , -5 , -3 , \dots >$

ملاحظة :- في السؤال السادس يجب ان نعلم ان قيمة n مجهولة وان $U_8 = 15$.

6-2 المتتابعة الهندسية Geometric Sequence

هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق لهُ مباشرةً يساوي عدداً ثابتاً يسمى أساس المتتابعة ويرمز لهُ (r) اي ان :-

$$r = \frac{U_{n+1}}{U_n}$$

على ان لا يكون حدٌ فيها يساوي صفر.

ففي المتتالية التالية :- $< 2, 4, 8, 16, \dots >$ نلاحظ ان :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{2} = 2 \quad , \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{8}{4} = 2$$

وهكذا فإن ناتج قسمة اي حد على الحد السابق لهُ يساوي 2 فنقول انها تُمثلُ متتابعة هندسية وأساسها $r = 2$ وكذلك فإن حدها الأول هو $a = 2$ اما المتتابعة $< 1, 4, 9, 16, 25 >$ فأنها لا تمثلُ متتابعة هندسية لأن:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{1}, \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{U_3}{U_2} \neq \frac{U_2}{U_1}$$

∴ المتتابعة الهندسية التي حدها الأول (a) وأساسها (r) هي :-

$$< U_n > = < a, ar, ar^2, ar^3, \dots >$$

حيثُ ان $U_1 = a$ ويسمى الحد الأول ، $U_2 = ar$ ويسمى الحد الثاني ، $U_3 = ar^2$ ويسمى الحد الثالث وهكذا...

1-6-2 الحد العام للمتتابعة الهندسية General Term for Geometric sequence

ان الحد العام للمتتابعة الهندسية هو :-

$$U_n = a.r^{n-1}$$

مثال 12

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول يساوي (27) واساسها $(\frac{1}{3})$

الحل

$$U_1 = a = 27$$

$$U_2 = a.r = 27 \times \frac{1}{3} = 9$$

$$U_3 = a.r^2 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 27 \times \frac{1}{9} = 3$$

$$U_4 = a.r^3 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 27 \times \frac{1}{27} = 1$$

$$U_5 = a.r^4 = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 27 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{3}$$

∴ المتتابعة هي $< 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3} >$

مثال 13

جد الحد السادس في المتتابعة الهندسية $< 6 , 12 , 24 , \dots >$

الحل

$$a = 6 , r = \frac{12}{6} = 2 \quad , n = 6$$

قانون الحد العام

$$U_n = a . r^{n-1}$$

$$U_6 = 6 \times 2^{6-1}$$

$$U_6 = 6 \times 2^5$$

$$U_6 = 6 \times 32 = 192$$

مثال 14

في مختبر الحاسوب في إحدى المدارس يوجد ثمانية اجهزة حاسوب، الذاكرة المستخدمة في كل جهاز تساوي ضعف الذاكرة المستخدمة في الجهاز الذي قبلهُ. فإذا كانت الذاكرة المستخدمة في الحاسوب الأول (5G) فكم تبلغُ الذاكرة المستخدمة في الحاسوب الخامس؟

الحل

إن ذاكرة الحاسوب الأول ستكون الحد الأول $a = 5$ وذاكرة الحاسوب الثاني ستكون ضعفها اي 10 فبذلك سيكون الحد الثاني هو 10 والأساس هو $r = \frac{10}{5} = 2$ وسنجد الحد الخامس الذي هو الحاسوب الخامس

$$U_5 = 5 \times 2^{5-1}$$

$$U_5 = 5 \times 2^4$$

$$U_5 = 5 \times 16 = 80G$$

مثال 15

في محل تجاري يوجد 6 مولدات كهربائية موضوعة بشكلٍ متسلسل، فإذا كانت المولدة الثانية تولدُ نصف ما تولده المولدة الأولى من التيار، فإذا كانت الأولى تولد ($640\ A$) فكم ستولد المولدة السادسة من التيار ؟

الحل

ان ما تولده المولدة الأولى من التيار سيكون الحد الأول اي ان $a = 640$ ويكون الحد الثاني 320 اي نصفهُ اي ان الأساس هو $\frac{1}{2}$ والمطلوب في السؤال ايجاد الحد السادس وكما يلي:

$$U_6 = a\, r^5$$

$$\Rightarrow U_6 = 640 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Rightarrow U_6 = 640 \times \frac{1}{32} = 20 \ A$$

7-2 الأوساط الهندسية Geometric Means

هي الأعداد التي تقعُ بين عددين او حدّين معلومين كأن ندخل الأعداد المُرتبة $b, c, d, \ldots$ بين العددين a, f بحيثُ ان $< a, b, c, d, \ldots, f >$ تكون متتابعة هندسية فإن الأوساط الهندسية هي الأعداد $b, c, d, \ldots$ حيثُ ان :-

عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + 2

مثال 16

ادخل ستة اوساط هندسية بين العددين $4, 512$ فما هذهِ الأوساط ؟

الحل

عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + 2

عدد حدود المتتابعة $= 6 + 2 = 8$

ستكون المتتابعة مكوّنة من ثمانية حدود وسيكون الحد الأخير $U_8 = 512$

والحد الأول هو $a = 4$

$$U_8 = a r^7 \Rightarrow 512 = 4r^7 \Rightarrow 128 = r^7$$

$$r^7 = 2^7 \Rightarrow r = 2$$

$\therefore$ الأوساط هي ابتداءً من الحد الثاني والى الحد السابع

$$U_2 = ar = 4 \times 2 = 8$$

$$U_3 = ar^2 = 4 \times 2^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$U_4 = ar^3 = 4 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$$

$$U_5 = ar^4 = 4 \times 2^4 = 4 \times 16 = 64$$

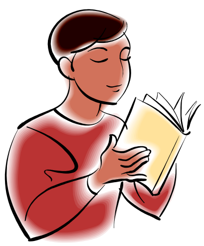
$$U_6 = ar^5 = 4 \times 2^5 = 4 \times 32 = 128$$

$$U_7 = ar^6 = 4 \times 2^6 = 4 \times 64 = 256$$

$\therefore$ الأوساط الهندسية هي :- $8, 16, 32, 64, 128, 256$

ملاحظة :-

يمكن ان نجد المتتابعة الهندسية وذلك بضرب الأساس في الحد الأول لينتج الحد الثاني وبضرب الأساس في الحد الثاني لينتج الحد الثالث وهكذا.



8-2 مجموع المتتابعة الهندسية المنتهية Sum of a Geometric Sequence

كما نعلم ان المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a وأساسها r هي $< a, ar, , ar^2 , ar^3, \dots >$ فإذا اخذنا عدداً معيناً من حدودها الأولى اي (n) من الحدود الأولى اي $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$ وإذا رمزنا لمجموع هذهِ الحدود بالرمز S_n فيكون :-

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots ar^{n-1} \qquad \dots (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في r فتُصبح

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots r \times ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots ar^n \qquad \dots (2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على :-

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1}$$

هذا قانون مجموع عدد من حدود المتتابعة الهندسية .

مثال 17

جد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة الهندسية $< 1, 2, 4, 8, \dots >$

الحل

$$a = 1, \quad r = \frac{2}{1} = 2, \quad n = 8$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \Rightarrow S_n = \frac{1(1 - 2^8)}{1 - 2}$$

$$S_n = \frac{-255}{-1} = 255$$

تمارين (3-2)

1. اختر الإجابة الصحيحة :-

أ) المتتابعة الهندسية $> 40, 20, 10, 5 <$ أساسها يساوي :-

1) $r = 2$ 　　 2) $r = \frac{1}{2}$

3) $r = 3$ 　　 4) $r = \frac{1}{3}$

ب) قيمة x في المتتابعة الهندسية $> 27, x, 3, 1 <$ هي :-

1) $x = 8$ 　　 2) $x = -8$

3) $x = 9$ 　　 4) $x = -9$

ج) إن قيمة الحد الخامس في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول $a = 1$ وأساسها $r = \frac{1}{2}$ هو :-

1) $\frac{1}{16}$ 　　 2) 16

3) $\frac{1}{8}$ 　　 4) -8

2. أكتب الحدود الخمسة الأولى لكلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية :-

أ) الحد الأول $a = 3$ وأساسها $r = -3$

ب) الحد الأول $a = 5$ وأساسها $r = \frac{1}{5}$

3. ادخل اربعة اوساط هندسية بين $3, 96$.

4. جد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية $> 5, 10, 20, \dots <$.

5. متتابعة هندسية حدها الثالث 8 وحدها السادس 1 فجد حدها الأول وأساسها؟

أسئلة متنوعة

1. ضع (✓) امام العبارة الصائبة و(X) امام العبارة الخطأ فيما يلي :-

أ. في المتتابعة التالية $< \frac{n^2+1}{2} >$ فإن الحد الرابع هو $U_4 = \frac{17}{2}$.

ب. المتتابعة التالية تُمثل متتابعة حسابية $< 2, 4, 6, 8, \dots >$.

ج. الدلة التي مجالها $\mathbb{Z}$ تُمثل متتابعة.

د. الدالة التي مجالها $\mathbb{N}$ تمثل متتابعة.

هـ. المتتابعة الحسابية التالية $U_n =< -39, -37, -35, \dots >$ أساسها هو $d = 2$؟

و. أساس المتتابعة الهندسية هو ناتج جمع كل حد فيها مع الحد السابق لهُ مباشرةً أي $r = U_{n+1} + U_n$.

2. اكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة التالية :-

$$U_n = \begin{cases} n^2 & \text{فردي } n \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{زوجي } n \end{cases}$$

3. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الحسابية التي حدها الثاني يساوي نصف الحد الأول علماً ان الحد الأول يساوي 2 ؟

4. جد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتابعة الحسابية $< -2, -5, -8, \dots >$

5. جد الحد الحادي عشر من المتتابعة الحسابية $< 3, 7, 11, \dots >$.

6. جد الحد السادس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها 2 ؟

7. ادخل اربعة اوساط هندسية بين العددين $1, -32$.

8. إن الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقبل القسمة على 3 ابتداءً من العدد 9 تتمثلُ بالمتتابعة الحسابية التالية $< 9, 12, 15, \dots >$ احسب مجموع ثمانية حدود الأولى منها؟

9. اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 16 وأساسها $\frac{1}{4}$ ؟

10. جد المتتابعة الحسابية التي حدها الثامن (-21) وحدها الثاني (3)؟

11. جد مجموع 6 حدود الأولى من المتتابعة الهندسية $< 4, 8, 16, \dots >$.

الفصل الثالث

طرائق العد
ومبرهنة ذي الحدين

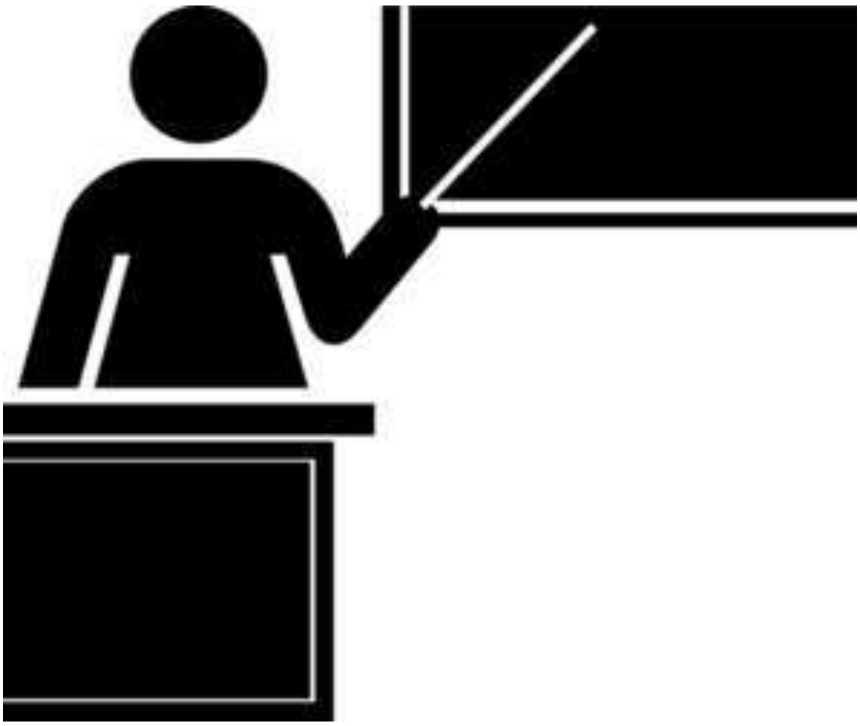
الفصل الثالث
طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين
(Counting Methods & Binomial theorem)

البنود
(SECTIONS)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Factorial	$n!$	مضروب العدد
Permutation	$P_r^n = P(n,r)$	التباديل
Positive Integer	$c_r^n = c(n,r) = \binom{n}{r}$	التوافيق
Positive Integer	$\mathbb{Z}^+$	مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة
Real numbers	$\mathbb{R}$	مجموعة الاعداد الحقيقية
General Term	T_r	الحد العام

سوف نتعلم في هذا الفصل:-

- المبدأ الأساسي للعدد وتطبيقاته العملية.
- مفهوم مضروب العدد الصحيح وخواص المضروب.
- مفهوم التباديل وخواصها وتطبيقات عملية عليها.
- مفهوم التوافيق وخواصها وتطبيقات عملية عليها.
- مبرهنة ذي الحدين بأسس صحيحة موجبة.
- استخدام مبرهنة ذي الحدين لإيجاد مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.
- إيجاد حد معين من مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.
- إيجاد الحد الأوسط او الحدين الاوسطين في مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.



الفصل الثالث

طرائق العد ومبرهنة ذي الحدين

(*Counting Methods* & Binomial ***theorem***)

3-1طرائق العد (Counting Methods)

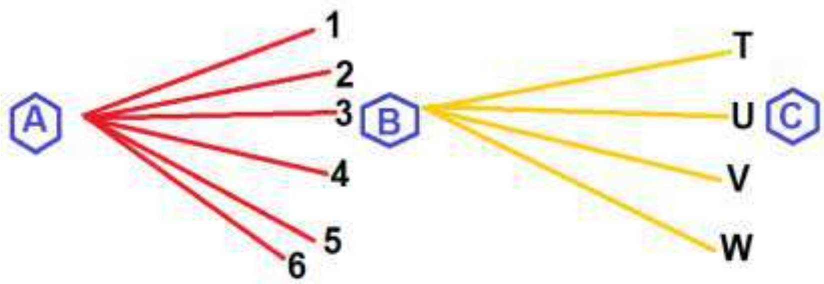
3-1-1 مبدأ العد الأساسي (FundamentalCounting Principle)

مثال 1

إذا كانت هنالك 6 طرق يمكن ان نسلكها بين المدينتين (A) و (B)، و4 طرق يمكن ان نسلكها بين المدينتين (B) و (C)فبكم طريقة يمكن لشخص ان يسافر من المدينة (A) الى المدينة (C) مروراً بالمدينة (B)؟

الحل

بالنظر الى المخطط ادناه يمكننا التوصل الى عدد الطرق التي يمكن ان يسلكها الشخص وهي *24* طريقة ونبينها بالتفصيل الاتي: -



$1T, 1U, 1V, 1W$

$2T, 2U, 2V, 2W$

$3T, 3U, 3V, 3W$

$4T, 4U, 4V, 4W$

$5T, 5U, 5V, 5W$

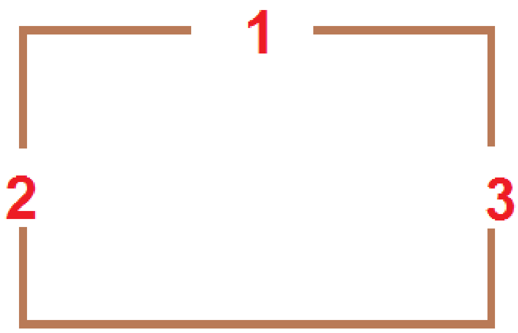
$6T, 6U, 6V, 6W$

مثال 2

بناية لها ثلاثة مداخل، فبكم طريقة يتسنى لشخص ان يدخل البناية من أحد المداخل ويغادرها من مدخل مختلف.

الحل

بالنظر الى المخطط المجاور يمكننا التوصل الى عدد الطرق التي يمكن ان يسلكها الشخص هي 6 طرقونبينها بالتفصيل الاتي: -



تكملة

- يدخل من المدخل 1 ويغادر من المدخل 2
- يدخل من المدخل 1 ويغادر من المدخل 3
- يدخل من المدخل 2 ويغادر من المدخل 1
- يدخل من المدخل 2 ويغادر من المدخل 3
- يدخل من المدخل 3 ويغادر من المدخل 1
- يدخل من المدخل 3 ويغادر من المدخل 2

عبارة أولية :-

أذا كان لدينا عدد (K) من العمليات (او الاختيارات) وكان بالإمكان اجراء العملية الاولى بعدد من الطرق مقداره (m) ، وكان بالإمكان اجراء العملية الثانية بعدد من الطرق مقداره (n) ، وكان بالإمكان اجراء العملية من الرتبة (K) بعدد من الطرق مقداره (z) ، بحيث ان اجراء اي عملية لا يؤثر على اجراء اي من العمليات الاخرى فان عدد الطرق التي يمكن اجراء كل تلك العمليات مجتمعة يساوي:-

$$m \times n \times \ldots \times z$$

الان أصبحبإمكاننا حل المثال (1) أعلاه باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه كالاتي:

- عدد الطرق المتاحة للسفر من المدينة (A) الى المدينة (C) مروراً بالمدينة (B) تساوي

$$4 \times 3 = 12 \ (\text{طريقة})$$

كما أصبح بإمكاننا حل المثال (2) أعلاه باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه كالاتي:

- عدد الابواب الممكن الدخول منها يساوي 3.
- عدد الابواب التي يمكن الخروج منها يساوي 2 (لوجود شرط ان يكون الخروج من باب لم يتم الدخول منه). اذن عدد الطرق :-

$$3 \times 2 = 6 (\text{طريقة})$$

مثال 3

اراد 3 سائحين أن يقطنوا في مدينة فيها ستة فنادق على ان يكون كل منهم في فندق مختلف، فبكم طريقة يمكن اجراء ذلك؟

الحل

عدد اختيارات السائح الاول تساوي6 .

عدد اختيارات السائح الثاني تساوي 5 كونه لا يستطيع اختيار الفندق الذي سكن فيه السائح الاول.

عدد اختيارات السائح الثالث تساوي 4 كونه لا يستطيع اختيار الفندقين اللذين سكن فيهما السائحان الاول والثاني. وعليه (باستخدام العبارة الأولية التي اوردناها أعلاه) تكون عدد الطرق الممكنةهي: -

مثال 4

كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$

a) التكرار مسموح بهb) التكرار غير مسموح به

الحل

a) بما ان التكرار مسموح به فان:-

عدد الطرق لاختيار عدد يوضع في مرتبة المئات =6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات =6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد=6

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من ثلاث مراتب هو: -

$6 \times 6 \times 6 = 216$(طريقة)

b) بما ان التكرار غير مسموح به فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات =6

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 5

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد = 4

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من ثلاث مراتب هو:-

$6 \times 5 \times 4 = 120$(طريقة)

مثال 5

كم عدد رمزه مكون من رقمين وأصغر من 40 يمكن تكوينه باستخدام الارقام $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

a) التكرار مسموح به b) التكرار غير مسموح به

الحل

a) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد = 5

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من مرتبتين وأصغر من 40 هو:-

$3 \times 5 = 15$(طريقة)

b) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات =3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد =4 (لأن التكرار غير مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار عدد مكون من مرتبتين وأصغر من 40هو:-

$3 \times 4 = 12$(طريقة)

مثال 6

كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب وأكبرمن 500 يمكن تكوينه باستخدام الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

a) التكرار مسموح به b) التكرار غير مسموح به

الحل

a) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات =3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات =7

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة الاحاد =7

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد المطلوب هو:-

$3 \times 7 \times 7 = 147$(طريقة)

b) عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات =3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 6 لان التكرار غير مسموح به

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات =5 لان التكرار غير مسموح به

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد المطلوب هو:-

$3 \times 6 \times 5 = 90$(طريقة)

مثال 7

كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب وأكبرمن500 يمكن تكوينه منالارقام$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به.

b) يكون العدد فردياً وتكرار الرقم في العدد مسموح به.

الحل

a) بما ان العدد المطلوبزوجي و الأرقام الزوجية المعطاة هي $\{2, 4, 6\}$وعددها 3 فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم زوجي يوضع في مرتبة الاحاد = 3

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 6(لان التكرار غير مسموح به)

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات =5(لان التكرار غير مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد هو:-

$$(3 \times 6 \times 5 = 90)\text{طريقة}$$

b) بما ان العدد المطلوب فردي و الأرقام الزوجية المعطاة هي $\{1, 3, 5, 7\}$وعددها 4 فان:-

عدد الطرق لاختيار رقم فردي يوضع في مرتبة العشرات =4

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة العشرات = 7 (لان التكرار مسموح به)

عدد الطرق لاختيار رقم يوضع في مرتبة المئات= 7 (لان التكرار مسموح به)

اذن عدد الطرق الكلية لاختيار العدد هو:-

$$4 \times 7 \times 7 = 196\ \text{(طريقة)}$$

2-1-3 مضروب العدد الصحيح(*Factorial of Integer Number*)

إذا كان لدينا10 اشخاص يراد توظيفهم في 10 وظائف مختلفة فمن البديهي ان الوظيفة الاولى يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص العشرة بينما الوظيفة الثانية يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص التسعة المتبقين والوظيفة الثالثة يمكن ان يشغلها اي من الاشخاص الثمانية المتبقين ... وهكذا الى ان نجد ان الوظيفة العاشرة لم يتبق لإشغالها سوى شخص واحد فقط، فإذا احتسبنا مراحل اشغال الوظائف وهي عشر مراحل فان عدد الخيارات في كل مرحلة سيكون بالترتيب التالي:-

الوظيفة10	الوظيفة9	الوظيفة8	الوظيفة7	الوظيفة6	الوظيفة5	الوظيفة4	الوظيفة3	الوظيفة2	الوظيفة1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

اي ان خيارات توزيع الاشخاص على الوظائف سوف تكون

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$$

فإذا أعممنا الفكرة بتوظيف n من الاشخاص في n من الوظائف فان خيارات توزيع الاشخاص على الوظائف سوف تكون:

$$n\,(n-1)(n-2)(n-3)\dots 1$$

وفي احيان كثيرة في الرياضيات نحتاج لإجراء عملية ضرب تنازلي يبدأ بالعدد الصحيح n وينتهي بالعدد الصحيح 1، يرمز لعملية الضرب هذه بالرمز $n!$ (يقرأ مضروب العدد n) ويعرف كالاتي

تعريف مضروب العدد الصحيح:

$$1)\quad n! = n(n-1)(n-2)\dots 1 \qquad n \in \mathbb{Z}^{+} : n \geq 2$$
$$2)\quad 1! = 1$$
$$3)\quad 0! = 1$$

ملاحظة:-

$$n! = n(n-1)!$$

فلو عوضنا $n = 1$ فإننا نحصل على:-

$$1! = 1.(1-1)!$$
$$1! = 1 \times 0!$$

ولو عوضنا $n = 2$ فإننا نحصل على:-

$$2! = 2 \times (2-1)!$$
$$2! = 2 \times 1!$$

ولو عوضنا $n = 3$ فإننا نحصل على:-

$$3! = 3 \times (3-1)!$$
$$3! = 3 \times 2!$$

ويمكننا استخدام ما توصلنا اليه سابقاً وهو $(2! = 2 \times 1!)$ لنحصل على:-

$$3! = 3 \times 2 \times 1!$$

ولو عوضنا $n = 4$ فإننا نحصل على:-

$$4! = 4 \times (4-1)!$$
$$4! = 4 \times 3!$$

ويمكننا استخدام ما توصلنا اليه سابقاً وهو $(3! = 3 \times 2!)$ و $(3! = 3 \times 2 \times 1!)$ لنحصل على

$$4! = 4 \times 3 \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1!$$

ونستطيع اعمام ذلك كالاتي:-

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(\dots)(n-m)! \qquad m \leq n \quad \text{حيث}$$

مثال 8

اثبت ان :

$$\frac{9!}{3!\,3!\,3!} = 1680$$

الحل

$$L.H.S = \frac{9!}{3!\,3!\,3!}$$

$$L.H.S = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{9 \times 4}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

$$= 1680$$

$$= R.H.S$$

مثال 9

جد قيمة n إذاكان:-

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

الحل

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{(n+1) \times n \times (n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1) \times n = 30$$

$$n^2 + n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n-5)(n+6) = 0$$

اما: $(n-5) = 0 \Rightarrow n = 5$

او: $(n+6) = 0 \Rightarrow n = -6 \notin \mathbb{Z}^+$ (يهمل)

مثال 10

جد قيمة n إذا علمت ان: $n! = 5040$

الحل

نكتب العدد 5040 على شكل حاصل ضرب اعداد متتابعة ابتداءً بالعدد 1 لنحصل على:-

$$5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

$$n! = 5040 \Rightarrow n! = 7! \quad \Rightarrow n = 7$$

3-1-3 التباديل (Permutation)

يسمى وضع r من الاشياء مأخوذة من n من الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الاشياء. وتقرأ تبديل n ماخوذ منه r ويرمزله بالرمز P_r^n او $P(n,r)$.

ملاحظة :- في التباديل يكون الترتيب مهماً جداً. اي انه إذا اختلف الترتيب فإننا نحصل على وضع جديد. على سبيل المثال ABC يختلف عن BAC ويختلف عن CAB وهكذا.

تعريف التباديل:

ليكن $n, r \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $n \geq r$:

$$P_r^n = P(n,r) = \begin{cases} n! & ; r = n \\ n.(n-1).(n-2)\dots(n-r+1) & ; r < n \\ 1 & ; r = 0 \end{cases}$$

ملاحظة :-

$$P_r^n = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 11

أحسب: $P(8,3)$

الحل

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!}$$

$$P(8,3) = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$$

$$P(8,3) = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

مثال 12

أحسب: P_4^4

الحل

$$P_4^4 = 4!$$

$$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال 13

أثبت ان: $P(5,0) = 1$

الحل

$$L.H.S = P(5,0)$$
$$= \frac{5\,!}{(5-0)!}$$
$$= \frac{5\,!}{5!} \qquad = 1 = R.H.S$$

مثال 14

جد قيمة n اذا كان $P(n,2) = 90$

الحل

$$P(n,2) = 90$$
$$n(n-1) = 90$$
$$n^2 - n = 90$$
$$n^2 - n - 90 = 0$$
$$(n-10)(n+9) = 0$$

أما: $(n-10) = 0 \Rightarrow n = 10$

أو: (يهمل) $(n+9) = 0 \Rightarrow n = -9 \notin \mathbb{Z}^+$

مثال 15

شخص لديه 8 أشرطة قماش ملونة بألوانمختلفة، فبكم طريقة يمكن له ان يختار اربعة منها ليصمم علماً

الحل

هنا$(n = 8)$، $(r = 4)$وحيث ان الترتيب مهم يكون:-

$$P_r^n = P(8,4) = \frac{8\,!}{(8-4)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 1680 \text{(طريقة)}$$

كما يمكننا اختصار خطوات الحل بان نبدأ بالعدد8 وعمل أربع نقلات تنازلية (اي نتوقف عندالعدد5)وكما يأتي:-

$$P(n,r) = P(8,4) = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680 \text{ (طريقة)}$$

مثال 16

كم كلمة ذات 4 حروف مختلفة يمكن تكوينها باستخدام حروف العبارة (قوت القلوب):-

الحل

لاحظ ان الحروف المختلفة المستخدمة في العبارة هي (ق ،و،ت، ا، ل، ب)وعددها 6

اي ان $(n=6)$ ، $(r=4)$ وحيث ان الترتيب مهم يكون :-

$$P(n,r)=P(6,4)=6\times5\times4\times3$$

$$=360 \text{ (طريقة)}$$

مثال 17

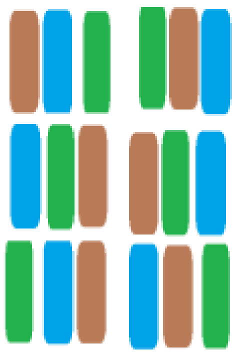
بكم طريقة يمكن ترتيب وضع 3 كتب اغلفتها مختلفة الألوانعلى رف في مكتبة.

الحل

هنا $(n=3)$ ، $(r=3)$ وحيث ان الترتيب مهم يكون

$$P(n,r)=P(3,3)=3!=3\times2\times1=6 \text{(طريقة)}$$

(لاحظ الشكل المجاور)

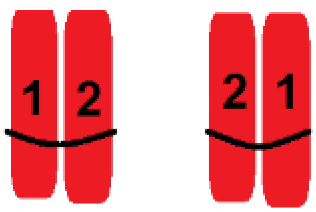


مثال 18

بكم طريقة يمكن وضع 5 كتب على رف في مكتبة بحيث يبقى كتابان محددان متجاورانمع بعضها دائماً.

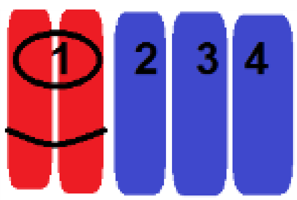
الحل

هذا السؤال مخادع وينبغي علينا الانتباه الى ان السبيل الوحيد لضمانبقاء الكتابين المحددين متجاورين عند وضعهما على الرف هو اعتبارهماكتاباً واحداً (اي ربطهما معاً باستخدام خيط مثلاً). لاحظ ان الكتابينلمحددين يمكن ترتيبهما كرزمة واحدة بطريقتين اعتماداً على من يكونبجهة اليسار كما في الشكل المجاور أي:-



$$[P(2,2)=2!=2\times1=2]$$

وهكذا سوف يكون المطلوب هو ترتيب اربعة كتب (أحدهمامزدوج) على رف في مكتبة وذلك يتم بـ 24طريقة كما في الشكل المجاور أي:-



$$]P(4,4)=4!=4\times3\times2\times1=24[$$

وحسب المبدأ الاساسي للعد يكون عدد الطرق الكلية هو

$$2\times24=48 \text{ (طريقة)}$$

4-1-3 التوافيق (Combination)

يسمى وضع r من الاشياء ماخوذ ة من n من الاشياء بصرف النظر عن ترتيبها بانه توفيق لهذه الاشياء. وتقرأ توفيق (او توافيق n) مأخوذ منه r ويرمزله بالرمز C_r^n او $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$.

ملاحظة: -في التوافيق يكون الترتيب غير مهم. اي انه إذا اختلف الترتيب فقط فان وضع الاشياء يبقى كما هو. على سبيل المثال إذا كان لدينا مجموعة الطلاب{احمدعلي،،محمد} وغيرنا في ترتيب كتابة الاسماء لتكون{علي، محمد، احمد}او {احمد ، علي، محمد} فان المجموعة هي للطلاب ذاتهم اي ان الترتيب غير مهم .

تعريف التوافيق:

ليكن $n,r \in \mathbb{Z}^+$ بحيث $n \geq r$:

$$c_r^n = c(n,r) = \binom{n}{r} = \begin{cases} \dfrac{p(n,r)}{r!} & ; r < n \\ 1 & ; r = 0,1 \end{cases}$$

ملاحظات:-

$$1)\ C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r\,!}$$
$$2)\ C(n,r) = C(n,n-r)$$

مثال 19

أحسب: $C(8,3)$

الحل

$$C(8,3) = \frac{8!}{(8-3)! \times 3!}$$
$$= \frac{8!}{5! \times 3!}$$
$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

مثال 20

أحسب: $C(50,48)$

الحل

$$C(50,48)=C(50,50-48)=C(50,2)$$

$$=\frac{P(50,2)}{2!}=\frac{50\times 49}{2\times 1}=25\times 49=1225$$

مثال 21

كم مجموعة جزئية ذات 3 عناصر يمكن تكوينها من مجموعة شاملة ذات 10 عناصر؟

الحل

ان ترتيب وضع العناصر في المجموعات غير مهم كما اوضحنا لفاً ولذلك يكون عدد المجموعات الجزئية:

$$C(10,3)=\frac{P(10,3)}{3!}$$

$$=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}$$

$$=5\times 3\times 8$$

$= 120$ (مجموعة جزئية)

مثال 22

كم شكل رباعي يمكن تحديده من ست نقاط لا تقع3 منها على استقامة واحدة.

الحل

ان الترتيب عند رسم قطع المستقيمات التي تصل بين ازواج النقاط غير مهم، والشكل الرباعي يكفي لتحديده أربع نقاط لذلك يكون عدد الاشكال الرباعية التي يمكن تحديدها هو :-

$$C(6,4)=\frac{P(6,4)}{4!}$$

$$=\frac{6\times 5\times 4\times 3}{4\times 3\times 2\times 1}$$

$= 3\times 5 = 15$(شكل رباعي)

مثال 23

أذا كان عدد أسئلة امتحان الرياضيات هو 8والمطلوب حل 5أسئلة منها فقط.فبكم طريقة يمكن الإجابة؟

الحل

حيث ان الترتيب غير ضروري عند حل الاسئلة في الامتحان (لا يشترط الاجابة حسب ترتيب الاسئلة) لذلك يكون عدد الطرق الممكنة للإجابةهي:-

$$C(8,5)=\frac{P(8,5)}{5!}$$

$$=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}$$

$= 8\times 7 = 56$(طريقة)

مثال 24

بكم طريقة يمكن أخيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين 7 رجال و 5سيدات؟

الحل

في هذا المثال نلاحظ ان الترتيب غير مهم لذلك يكون عدد الطرق كالاتي:-

يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين 7بطرق عددها $C(7,3)$ ويمكن اختيار سيدتين من بين 5 بطرقعددها $C(5,2)$ وبالاعتماد على المبدأ الاساسي للعد تكون عدد الطرق الكلية لاختيار اللجنة هو:-

$$C(7,3)\times C(5,2)=\frac{P(7,3)}{3!}\times\frac{P(5,2)}{2!}$$

$$=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\times\frac{5\times 4}{2\times 1}$$

$$=35\times 10=350(\text{طريقة})$$

مثال 25

باقة ورد تحتوي 6وردات حمر و 4 وردات بيض يراد اختيار5 وردات تكون ثلاثة منها حمر فقط فبكم طريقة يمكن الاختيار؟

الحل

عدد طرق اختيار 3 وردات حمر هو$C(6,3)$، و حيث ان المطلوب هو 5 وردات فان العدد المتبقي وهو وردتين يتم اختيارهما من الورود البيض ويكون عدد طرق اختيارها هو$C(4,2)$.

وبالاعتماد على المبدأ الاساسي للعد يكون عدد الطرق الكلية لاختيار الورودهو:

$$C(6,3)\times C(4,2)$$

$$=\frac{P(6,3)}{3!}\times\frac{P(4,2)}{2!}$$

$$=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}\times\frac{4\times 3}{2\times 1}$$

$$=20\times 6=120\ (\text{طريقة})$$

تمرين (3-1)

1.شاحنة تحتوي على20 صندوقاً في كل صندوق100 علبة تحتوي العلبة الواحدة على3 أجهزة موبايل. احسب حمولة الشاحنة من الموبايلات.

2.كم عدد زوجي ذي4 مراتب يمكن تكوينه من الارقام $\{5,1,6,2,7,4,8\}$إذاكان :

a) التكرار مسموحاً به في العدد نفسه   b) التكرار غير مسموح به في العدد نفسه

3.صندوق يحتوي عشرة مصابيح فإذا كانت (4) منها عاطلة وسحبنا منها ثلاثة مصابيح. جد عدد طرق السحب في الحالات الاتية: -

a) اثنان منها صالحة وواحد عاطل   b) كلها عاطلة   c) على الاقل مصباح واحد صالح

4.إذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما هو8 اسئلة وكان المطلوب الاجابة عن خمسة منها فقط بشرط ان تتضمن الاجابة ثلاثة من الاسئلة الاربعة الاولى، فبكم طريقة يمكن الاجابة؟

5. بفرض ان التكرار غير مسموح به احسب -:

a) عدد الاعداد ذات3 مراتب التي يمكن تكوينها من الارقام $\{2,3,5,6,7,9\}$

b) عدد الاعداد ذات3 مراتب الاقل من400 التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

c) عدد الاعداد الفردية ذات3 مراتب التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

d) عدد الاعداد ذات3 مراتب من مضاعفات العدد5 التي يمكن تكوينها من نفس الارقام.

6.جد قيمة nإذاكان -:

a) $P(n,2) = 72$

b) $\binom{n}{2} = 10$

c) $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

d) $C(n,4) = C(n,2)$

e) $P(n,3) = 6\,C(n,4)$

7.بكم طريقة يمكنك تكوين شفرة رمزية ذات6 حروف من حروف اللغة العربية (28حرفاً) إذا كان التكرار غير مسموح به ؟

8.صف دراسي فيه 5 طلاب مصريون و4 سوريون و 8عراقيون و 3 اردنيون . اخترنا طالبين. جد عدد طرق الاختيار ليكون:-

a) الطالبان عراقياً وسورياً

b) الطالبان كلاهما عراقي

c) الطالبان من قارة آسيا

2-3 مبرهنة ذي الحدين بأسس صحيحة موجبة (Binomial theorem)

1-2-3 المقدمة

سبق ان تعلمنا في المرحلة المتوسطة ان القوة الثانية للمقدار ذي الحدين $a+b$ هي $(a+b)^2$ وعرفنا ان:-

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

وعندما نحتاج الى القوة الثالثة للمقدار ذاته أي $(a+b)^3$ فإننا نتبع الطريقة الاتية:-

$$(a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b) = (a^2+2ab+b^2).(a+b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

وباستخدام اسلوب الضرب المتكرر نحصل على القوة الرابعة والخامسة وغيرها حيث نحصل على:-

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- يسمى الطرف الايمن لكل واحدة من المتساويات السابقة ((مفكوك ذي الحدين)) للأس 1 أو 2 أو 3... الخ.
- إذا طلب منا مثلاً أيجاد مفكوك $(a+b)^{100}$ فإننا نجد ان طريقة الضرب المتكرر التي اتبعناها فيما سبق تصبح غير ذات جدوى لكونها تحتاج الى وقت طويل وجهد كبير وكمية كبيرة من الاوراق، وقد حاول علماء الرياضيات عبر التاريخ البحث عن طريقة ميسرة لإيجاد مفكوك ذي الحدين.

2-2-3 ايجاد مفكوك ذي الحدين $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

إذا كان $n \in \mathbb{Z}^+$ وكان $a, b \in \mathbb{R}$ فإن: -

$$1)\ (a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$
$$2)\ (a-b)^n = C_0^n a^n b^0 - C_1^n a^{n-1} b^1 + C_2^n a^{n-2} b^2 - \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

ملاحظات :-

1) ان عدد الحدود يزيد واحدا على اس القوس ذي الحدين اي ان عدد حدودالمفكوك يساوي $n+1$ فمفكوك القوة الثانية يحتوي على ثلاثة حدود ومفكوك القوة الرابعة يحتوي على خمسة حدود ...وهكذا.

2) ان اس الحد الاول واس الحد الاخير يساوي اس القوس ذي الحدين، لاحظ المثالين الآتيين:-

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

3) ان أس a ينقص واحداً عن أس a في الحد الذي يسبقه بينما أس b يزيد بمقدار واحد عن أس b في الحد الذي يسبقه اي ان اسس a تنازلية من n الى 0 واسس b تصاعدية من 0 الى n.

4) ان مجموع أسي a, b في أي حد يساوي أس المقدار ذي الحدين وهو n .

5) في مفكوك $(a-b)^n$ تكون اشارة الحد الاول موجبة واشارة الحد الثاني سالبة وتتعاقب الاشارات بهذا الترتيب في بقية حدود المفكوك.

6) اذا كان n عدداً زوجياً فان عدد حدود المفكوك يكون فردياً ورتبة الحد الاوسط تصبح $\frac{n}{2}+1$ واذاكان n عدداً فردياً فان عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وتكون رتبة الحد ين الاوسطين $\left(\frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{n+1}{2}+1\right)$.

مثال 26

جد مفكوك $(2+x)^5$

الحل

$$(2+x)^5 = C_0^5 2^5 x^0 + C_1^5 2^{5-1} x^1 + C_2^5 2^{5-2} x^2 + C_3^5 2^{5-3} x^3 + C_4^5 2^{5-4} x^4 + C_5^5 2^{5-5} x^5$$

$$= C_0^5 2^5 x^0 + C_1^5 2^4 x^1 + C_2^5 2^3 x^2 + C_3^5 2^2 x^3 + C_4^5 2^1 x^4 + C_5^5 2^0 x^5$$

$$= 1\times 32\times 1 + 5\times 16\times x + 10\times 8\times x^2 + 10\times 4\times x^3 + 5\times 2\times x^4 + 1\times 1\times x^5$$

مثال 27

جد مفكوك $\left(1-\sqrt{x}\right)^5$

الحل

$$\left(1-\sqrt{x}\right)^5 = C_0^5 1^5 \left(\sqrt{x}\right)^0 - C_1^5 1^{5-1}\left(\sqrt{x}\right)^1 + C_2^5 1^{5-2}\left(\sqrt{x}\right)^2 - C_3^5 1^{5-3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C_4^5 1^{5-4}\left(\sqrt{x}\right)^4 - C_5^5 1^{5-5}\left(\sqrt{x}\right)^5$$

$$= C_0^5 1^5 x^0 - C_1^5 1^4\left(\sqrt{x}\right)^1 + C_2^5 1^3\left(\sqrt{x}\right)^2 - C_3^5 1^2\left(\sqrt{x}\right)^3 + C_4^5 1^1\left(\sqrt{x}\right)^4 - C_5^5 1^0\left(\sqrt{x}\right)^5$$

$$= 1\times 1\times 1 - 5\times 1\times\sqrt{x} + 10\times 1\times x - 10\times 1\times x\sqrt{x} + 5\times 1\times x^2 - 1\times 1\times x^2\sqrt{x}$$

$$= 1 - 5\sqrt{x} + 10x - 10x\sqrt{x} + 5x^2 - x^2\sqrt{x}$$

مثال 28

جد قيمة المقدار $(101)^3$

الحل

$$(101)^3 = (1+100)^3$$

$$= C_0^3 1^3 (100)^0 + C_1^3 1^2 (100)^1 + C_2^3 1^1 (100)^2 + C_3^4 1^0 (100)^3$$

$$= 1\times 1\times 1 + 3\times 1\times 100 + 3\times 1\times 10000 + 3\times 1\times 1000000$$

$$= 1 + 300 + 30000 + 3000000$$

$$= 3030301$$

3-2-3 إيجاد الحد العام في مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

لو تمعنا في مفكوك مبرهنة ذي الحدين لوجدنا ان الحد العام (اي الحد الذي تسلسله r) هو :-

$$T_r = C_{r-1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

مثال 29

جد الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$

الحل

$$T_r = C_{r-1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_5 = C_{5-1}^{10} a^{10-5+1} b^{5-1}$$

$$T_5 = C_4^{10} a^6 b^4$$

$$T_5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} a^6 b^4$$

$$T_5 = 210 a^6 b^4$$

مثال 30

جد الحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^5$ حيث $x \neq 0$

الحل

$$T_r = C_{r-1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_4 = C_{4-1}^{5} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-4+1} (-2x)^{4-1}$$

$$T_4 = C_3^{5} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{2} (-2x)^{3}$$

$$T_4 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{x^4}\right) (-8x^3)$$

$$T_4 = -80 \frac{x^3}{x^4}$$

$$T_4 = \frac{-80}{x}$$

مثال 31

برهن ان مفكوك المقدار الاتي فيه حد يحتوي x^{15} ثم جد معامله.

$$\left(x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^{10}$$

الحل

$$T_r = C_{r-1}^{n} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

$$T_r = C_{r-1}^{10} (x^2)^{10-r+1} \left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$

نغض النظر عن المعاملات العددية في الخطوة الاتية:-

$$x^{15} = (x^2)^{11-r} (x^{-3})^{r-1}$$

$$x^{15} = x^{22-2r} x^{-3r+3}$$

$$x^{15} = x^{25-5r}$$

$$15 = 25 - 5r$$

$$5r = 10$$

$$r = 2$$

اي ان الحد الذي يحتوي x^{15} هو الحد الثاني وعليه فان:-

$$T_2 = C_{2-1}^{10} (x^2)^{10-2+1} \left(\frac{2}{x^3}\right)^{2-1}$$

$$T_2 = C_1^{10} (x^2)^9 \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$T_2 = 10 \times x^{18} \times \left(\frac{2}{x^3}\right)$$

$$T_2 = 20x^{15}$$

اي ان المعامل العددي للحد هو20 .

4-2-3 ايجاد الحد الاوسط او الحدين الاوسطين في مفكوك $(a+b)^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$

كما اوردنا في الملاحظات السابقة فانه:-

- إذا كان n عدداً زوجياً فان عدد حدود المفكوك يكون فردياً ورتبة الحد الاوسط تصبح $\frac{n}{2}+1$.
- إذا كان n عدداً فردياً فان عدد حدود المفكوك يكون زوجياً وتكون رتبة الحدين الاوسطين $\left(\frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{n+1}{2}+1\right)$.

مثال 32

جد الحد الاوسط في مفكوك $(a+b)^6$

الحل

رتبة الحد الاوسط في المفكوك هي :-

$$\frac{n}{2}+1=\frac{6}{2}+1=3+1=4$$

اي ان الحد الاوسط هو الحد الرابع

$$T_r=C^n_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

$$T_4=C^6_{4-1}a^{6-4+1}b^{4-1}$$

$$T_4=C^6_3a^3b^3$$

$$T_4=20\,a^3b^3$$

مثال 33

جد الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(\frac{3x}{2}-\frac{2}{3x}\right)^7$

الحل

رتبتا الحدين الاوسطين في المفكوك هي: -

$$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\frac{n+1}{2}+1=\frac{7+1}{2}+1=\frac{8}{2}+1=4+1=5$$

اي ان الحدين الاوسطين هما الحدان الرابع والخامس.

$$T_r=C^n_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$$

$$T_4=C^7_{4-1}\left(\frac{3x}{2}\right)^{7-4+1}\left(\frac{-2}{3x}\right)^{4-1}$$

$$T_4=C^7_3\left(\frac{3x}{2}\right)^4\left(\frac{-2}{3x}\right)^3$$

تكملة

$$T_4 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{81x^4}{16} \times \frac{-8}{27x^3}$$

$$\boxed{T_4 = \frac{-105}{2}\ x}$$

$$T_5 = C^7_{5-1} \left(\frac{3x}{2}\right)^{7-5+1} \left(\frac{-2}{3x}\right)^{5-1}$$

$$T_5 = C^7_4 \left(\frac{3x}{2}\right)^3 \left(\frac{-2}{3x}\right)^4$$

$$T_5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{27x^3}{8} \times \frac{16}{81x^4}$$

$$\boxed{T_5 = \frac{70}{3x}}$$

مثال 34

اختصر المقدار $(2-x)^4 + (2+x)^4$ ثم جد قيمة المقدار

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^4 + \left(2-\sqrt{3}\right)^4$$

الحل

$$(2+x)^4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

$$(2-x)^4 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + T_5$$

بالجمع

$$(2+x)^4 + (2-x)^4 = 2[T_1 + T_3 + T_5]$$

$$= 2\left[2^4 + C^4_2 2^2 x^2 + x^4\right]$$

$$= 2[16 + 24x^2 + x^4]$$

$$= 32 + 48x^2 + 2x^4$$

ولإيجاد قيمة المقدار: - $(2+x)^4 - (2-x)^4$ نعوض $x = \sqrt{3}$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^4 + \left(2-\sqrt{3}\right)^4 = 32 + 48 \times 3 + 2 \times 9$$

$$= 194$$

تمرين (3-2)

1.جد مفكوك كلاً مما يأتي :-

$a)\ \ (a-b)^3$

$b)\ \ (1+x)^4$

$c)\ \ \left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^7 \quad ; x>0$

$d)\ \ \left(\dfrac{1}{x}+x\right)^6 \quad ; x\neq 0$

2. جد الحد الثامن في مفكوك: $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{10}$.

3. جد الحد الاوسط في مفكوك: $\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^{14}$.

4. جد الحدين الاوسطين في مفكوك: $\left(3x^2-\frac{2}{3x}\right)^5$.

5.جد الحد الخالي من x في مفكوك: $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$.

6. جد قيمة المقدار: $\left(x+\sqrt{3}\right)^4+\left(x-\sqrt{3}\right)^4$.

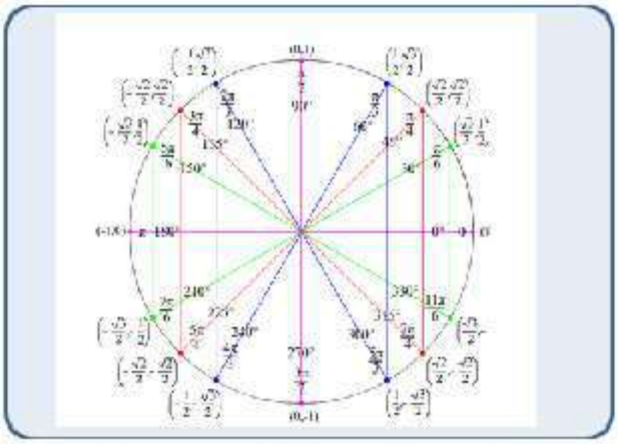
7. جد قيمة المقدار $(0.99)^6$ باستخدام مبرهنة القوس ذي الحدين.

8. جد الحد الاخير في مفكوك: $(1+x^n)^5$.

9. إذا علمت ان الحدين الاوسطين في مفكوك $(5x+4y)^7$ متساويان فما هي العلاقةبين x, y؟

10. برهن انه لا يوجد حد خال من x في مفكوك المقدار $\left(5x-\frac{4}{x^2}\right)^{19}$.

الفصل الرابع



الدوال الدائرية

الفصل الرابع
الدوال الدائرية
(Circular Functions)

البنود
(SECTIONS)

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية	Vocabulary
جيب الزاوية	$\sin\theta$	*sine*
جيب تمام الزاوية	$\cos\theta$	*cosine*
ظل الزاوية	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	*tangent*
قاطع تمام الزاوية	$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$	*cosecent*
قاطع الزاوية	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	*secent*
ظل تمام الزاوية	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	*cotangent*
الزاوية الفا	α	*alfa*
الزاوية بيتا	β	*beta*

تعلمنا سابقا :-

- مفهوم الزاوية الموجهة بالوضع القياسي ومفهوم دائرة الوحدة.
- التمييز بين نظامي قياس الزاوية الستيني والدائري وكيفية التحويل من نظام لأخر.
- النسب المثلثية ومقلوباتها لزاويه حادة.
- بعض العلاقات الاساسية بين النسب المثلثية.
- استعمال الحاسبة الالكترونية اليدوية في ايجاد قيم النسب المثلثية.
- إيجاد النسب المثلثية للزوايا الخاصة.
- رسم المخطط البياني للدوال $\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta$.
- مفهوم الزاوية الموجهة بالوضع القياسي ومفهوم دائرة الوحدة.

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مراجعة المعلومات التي درسناها في الصف الأول الصناعي.
- حل المثلث باستخدام قانوني الجيب والجيب تمام
- مفهوم زوايا الارتفاع والانخفاض واستخدامه في حل مسائل عملية
- قوانين الدوال الدائرية لمجموع او الفرق بين قياسي زاويتين
- قوانين الدوال الدائرية لضعف الزاوية
- قوانين الدوال الدائرية لنصف الزاوية
- كيفية حل المعادلات المثلثية

الفصل الرابع

الدوال الدائرية

$(Circular\ Functions)$

1-4 مراجعة وتعميق

عرفنا في دراستنا السابقة الدوال الدائرية sin , cos , tan
باستخدام هذه الدوال يمكننا ان نعرف دوال اخرى وذلك كما يأتي:

1-1-4 دالة ظل التمام (cot)

الدالة [Cotangent] ظل تمام ويرمز لها cot وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة tan (ظل) أي أن:

$$\cot\theta = \frac{1}{tan\,\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

تعريف دالة cot:

$$\cot : \{\theta : \theta \in \mathbb{R}\ , \sin\theta \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أي أن الدالة cot تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط $(\sin\theta \neq 0)$

2-1-4 تعريف دالة القاطع (sec)

الدالة [secant] (قاطع) ويرمز لها sec وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة cos (جيب تمام) أي ان :

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

تعريف دالة sec:

$$sec : \{\theta : \theta \in \mathbb{R}\ , \cos\theta \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

أي أن الدالة sec تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط $(\cos\theta \neq 0)$

3-1-4 تعريف دالة القاطع التمام (csc)

الدالة [cosecant] (القاطع التمام) ويرمز لها csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة sinجيب أي ان :

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

تعريف دالة csc:

$$csc : \{\theta : \theta \in \mathbb{R}\ , \sin\theta \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

أي أن الدالة csc تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط $(\sin\theta \neq 0)$

4-1-4 العلاقات بين الدوال الدائرية

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

ملاحظة :-

$$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2$$
$$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$$

وهكذا بالنسبة للدوال الدائرية الاخرى

اشتقاق العلاقات اعلاه

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

لقد سبق اشتقاقها في دراستنا السابقة

2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

البرهان:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (\div \cos^2\theta)$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

و. هـ. م

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

البرهان:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (\div \sin^2\theta)$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$
$$1 + \cot^2\theta = \mathrm{cec}^2\theta$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

و. هـ. م

مثال 1

أذا كان : $\cot\theta = \frac{4}{3}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$ أو $(0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2})$

جد قيم الدوال الدائرية الخمسة الأخرى أي قيم كل من: $(\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta, \csc\theta)$

الحل

$$1)\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4}$$

تكملة

2) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1 \Leftrightarrow \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$$\csc^2\theta = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \frac{16}{9} = \frac{9+16}{9} = \frac{25}{9}$$

$\therefore \csc^2\theta = \frac{25}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{\csc^2\theta} = \sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow \csc\theta = \pm\frac{5}{3}$$

$\because 0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \quad \therefore \csc\theta = \frac{5}{3}$

3) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$$\sec^2\theta = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}$$

$\sec^2\theta = \frac{25}{16}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{\sec^2\theta} = \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$\sec\theta = \pm\frac{5}{4}$$

$\because 0^\circ < \theta < 90^\circ \Rightarrow \quad \therefore \sec\theta = \frac{5}{4}$

4) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} = 1 \times \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$$

5) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Leftrightarrow \sin\theta = \cos\theta\tan\theta$

$$\sin\theta = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$$

مثال 2

أثبت أن: $\sin\theta(\csc\theta - \sin\theta) = \cos^2\theta$

الحل

$$L.H.S = \sin\theta(\csc\theta - \sin\theta)$$

$$= \sin\theta\csc\theta - \sin^2\theta$$

$$= \sin\theta\frac{1}{\sin\theta} - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta = R.H.S$$

مثال 3

أثبت أن: $\cot^2\theta\ \sec^2\theta - \cot^2\theta = 1$

الحل

$$L.H.S = \cot^2\theta\ \sec^2\theta - \cot^2\theta$$

$$= \cot^2\theta\,(\sec^2\theta - 1)$$

$$= \cot^2\theta\ \tan^2\theta$$

$$= \frac{1}{\tan^2\theta} \times \tan^2\theta = 1 = R.H.S$$

5-1-4 قيم الدوال الدائرية التي قياسها $(-\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

مثال 4

أثبت أن: $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin(-\theta)\ \cos\theta$

الحل

$$L.H.S = (\sin\theta - \cos\theta)^2$$

$$= \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta$$

$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ (لأن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

$$R.H.S = 1 + 2\sin(-\theta)\cos\theta$$

$$= 1 + 2(-\sin\theta)\cos\theta$$

$$= 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

6-1-4 قيم الدوال الدائرية للزوايا $(90^0 n \pm \theta)$

حيث n عدد صحيح غير سالب، قياس لزاوية حادة

1 - الدوال الدائرية للزوايا $(90^0 \pm \theta)$ تتحول الدوال الدائرية للزوايا إلى متمماتها وبالعكس مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربعة أي:

$\sin(90^0 \pm \theta) = +\cos\theta$
$\cos(90^0 \pm \theta) = \mp \sin\theta$
$\tan(90^0 \pm \theta) = \mp \cot\theta$
$\cot(90^0 \pm \theta) = \mp \tan\theta$
$\sec(90^0 \pm \theta) = \mp \csc\theta$
$\csc(90^0 \pm \theta) = +\sec\theta$

2- الدوال الدائرية للزوايا $(270^0 \pm \theta)$ نفس الحالة الأولى مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربعة أي:

$\sin(270^0 \pm \theta) = -\cos\theta$
$\cos(270^0 \pm \theta) = \pm \sin\theta$
$\tan(270^0 \pm \theta) = \mp \cot\theta$
$\cot(270^0 \pm \theta) = \mp \tan\theta$
$\sec(270^0 \pm \theta) = \pm \csc\theta$
$\csc(270^0 \pm \theta) = -\sec\theta$

مثال 5

جد $4\cos^2 75^0$ إذا كان: $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

الحل

$75^0 = 90^0 - 15^0$

$\cos 75^0 = \cos(90^0 - 15^0)$ $\quad \because \cos(90^0 \pm \theta) = \mp \sin\theta$

$\cos 75^0 = \sin 15^0$

$(\cos 75^0)^2 = (\sin 15^0)^2$ بتربيع الطرفين

$\cos^2 75^0 = \sin^2 15^0$ نضرب طرفي المعادلة بالعدد 4

$4\cos^2 75^0 = 4\sin^2 15^0$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = 4\,\frac{2-\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

مثال 6

جد $\sin 150^0$, $\cos 315^0$

الحل

1) $150^0 = 90^0 + 60^0$

$$\sin 150^0 = \sin(90^0 + 60^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

2) $315^0 = 270^0 + 45^0$

$$\cos 315^\circ = \cos(270^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3 - الدوال الدائرية للزوايا $(180^0 \pm \theta)$ تبقى الدوال الدائرية نفسها مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربعة أي:

$$\sin(180^0 \pm \theta) = \mp \sin\theta$$
$$\cos(180^0 \pm \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180^0 \pm \theta) = \pm \tan\theta$$
$$\cot(180^0 \pm \theta) = \pm \cot\theta$$
$$\csc(180^0 \pm \theta) = \mp \csc\theta$$
$$\sec(180^0 \pm \theta) = -\sec\theta$$

4 - الدول الدائرية للزوايا $(360^0 \pm \theta)$ نفس الحالة الثالثة مع ملاحظة الإشارة في الأرباع الأربعة أي:

$$\sin(360^0 \pm \theta) = \pm \sin\theta$$
$$\cos(360^0 \pm \theta) = +\cos\theta$$
$$\tan(360^0 \pm \theta) = \pm \tan\theta$$
$$\cot(360^0 \pm \theta) = \pm \cot\theta$$
$$\csc(360^0 \pm \theta) = \pm \csc\theta$$
$$\sec(360^0 \pm \theta) = +\sec\theta$$

مثال 7

جد $\sin 150^0$ ، $\cos 315^0$

الحل

1) $150^0 = 180^0 - 30^0$

$$\sin 150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

2) $315^0 = 360^0 - 45^0$

$$\cos 315^0 = \cos(360^0 - 45^0) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال 8

جد $\cos(-240^0)$, $\tan(-300^0)$

الحل

1)
$$\begin{aligned} \cos(-240^0) &= \cos(240^0) \\ &= \cos(180^0 + 60^0) \\ &= -\cos 60^0 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} \tan(-300^0) &= -\tan 300^0 \\ &= -\tan(360^0 - 60^0) \\ &= -(-\tan 60^0) \\ &= \tan 60^0 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

تمارين (1-4)

1 . اذا كان $\cot\theta = -\frac{9}{40}$ ، بحيث $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

جد قيم الدوال الدائرية الخمسة الاخرى $(\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sec\theta, \csc\theta)$

2. أثبت صحة المتطابقات الاتية :-

1) $\sin^2\theta\tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

2) $\sec\theta - \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta} = \cos\theta$

3) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

4) $(\sec\theta + 1)[\sec(-\theta) - 1] = \tan^2\theta$

5) $\csc\theta + \cot\theta = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

6) $2\tan\theta\sec\theta = \frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

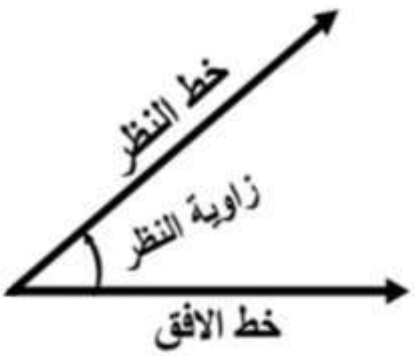
7) $\frac{\sec\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sec\theta} = \frac{\tan^2\theta + \cos^2\theta}{\tan\theta}$

8) $\frac{\cos\theta}{1+\sec\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\tan^2\theta}$

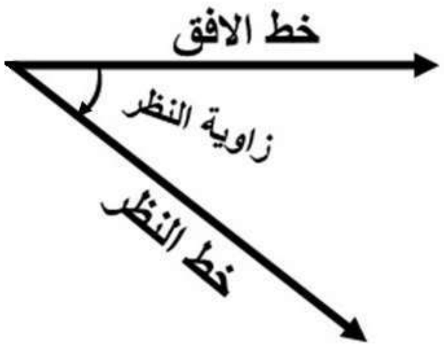
3. جد قيم كلاً مما يأتي :-

$\cos(-300°), \sin(-240°), \sec 210^\circ, \tan 330^\circ, \sin 420^\circ$

2-4 زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض



زاوية الارتفاع:- هي زاوية النظر الى الاعلى من فوق خط الأفق. (لاحظ الشكل المجاور)

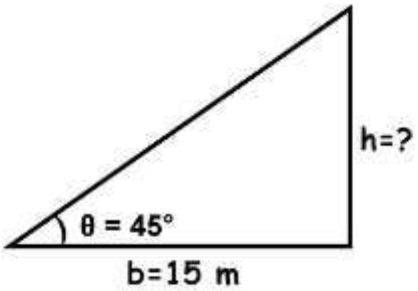


زاوية الانخفاض:- هي زاوية النظر الى الاسفل من تحت خط الأفق. (لاحظ الشكل المجاور)

مثال 9

من نقطة تبعد عن قاعدة عمود كهرباء بـ $(15\ m)$ وجد أن زاوية ارتفاع قمتها (45°) جد ارتفاع العمود الكهربائي ؟

الحل



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{ارتفاع عمود الكهرباء}}{\text{بعد النقطة عن قاعدة العمود}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{15} \Rightarrow 1 = \frac{h}{15}$$

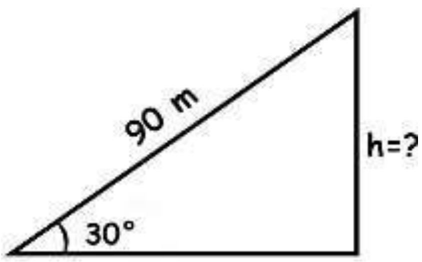
وباستخدام خواص التناسب (حاصل ضرب الطرفين= حاصل ضرب الوسطين) نتوصل الى:

$$h = 15\ m.$$

مثال 10

طائرة ورقية طول خيطها $(90m)$ والزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض تساوي (30°) جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الأرض ؟

الحل

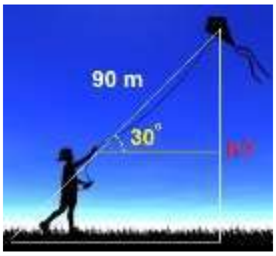


$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{90}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{90}$$

وباستخدام خواص التناسب (حاصل ضرب الطرفين= حاصل ضرب الوسطين) نتوصل الى:



$$2h = 90$$

$$\frac{2h}{2} = \frac{90}{2}$$

$$h = 45\ m.$$

مثال 11

شخص واقف على سطح منزل ارتفاعه $(6\ m.)$ رصد طيراً على حافة قمة عمارة وعندما نظر الى قاعدة العمارة لاحظ طفلاً يراقب الطير جد بعد العمارة عن المنزل وارتفاعها؟ إذا كان زاوية ارتفاع قمة العمارة (60°) وزاوية انخفاض قاعدة العمارة (45°).

الحل

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{6}{b}$$

$$1 = \frac{6}{b}$$

$b = 6\ m$ بعد العمارة عن المنزل

تكملة

$$2\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{b}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{6}$$

$$h = 6\sqrt{3} = 6 \times 1.7$$

$h = 10.2\, m$ ارتفاع العمارة عن سطح المنزل

ارتفاع العمارة عن سطح المنزل+ ارتفاع المنزل = ارتفاع العمارة

$$H = 6 + h$$

$$H = 6 + 10.2 = 16.2\, m.$$

تمارين (2-4)

1. وقف شخص على قمة مئذنة ملوية سامراء أبصر صديقين من اصدقائه يقفان مع قاعدة المئذنة على استقامة واحدة وكانت زاوية انخفاض الصديق الاول (30°) وزاوية انخفاض الصديق الثاني (60°) جد المسافة بين الصديقين ؟ مع العلم ارتفاع المئذنة $(52\, m.)$
2. وجد من موقع على سطح الارض يبعد عن قاعدة برج اتصالات بغداد أن زاوية ارتفاع قمتها (53°) وزاوية ارتفاع مطعم البرج (37°) وارتفاع البرج $(205\, m.)$ جد بعد الموقع عن قاعدة البرج والمسافة بين المطعم وقمة البرج ؟
3. طائرة مقاتلة على ارتفاع $(100\,000\ \text{ft.})$ رصدت هدفين معاديين على مستوي واحد على سطح الارض الاول بزاوية انخفاض (30°) والثانية بزاوية انخفاض (45°) جد بعدي الطائرة عن الهدفين؟ علماً أن $\sqrt{3} = 1.732$ ، $\sqrt{2} = 1.414$
4. شاهد صياد طيراً على شجرة نخيل فصوب ببندقية بزاوية مقدارها (30°) ولم يصب ثم تقدم بمسافة $(20\, m.)$ وصوب بزاوية مقدارها (60°) فأصاب الطير ، جد ارتفاع الشجرة ؟

4 -3 الدوال الدائرية لمجموع أو لفرق قياس زاويتين :

نبحث في هذا البند دوال مثل:

$$\sin(\alpha \pm \beta)\ ,\ \cos(\alpha \pm \beta)\ ,\ \tan(\alpha \pm \beta)\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α alpha (الفا) , β beta (بيتا)

أولاً:	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \cos\alpha\ \sin\beta$
ثانياً:	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$
ثالثاً:	$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\ \tan\beta}\ ,\ \tan\alpha\ \tan\beta \neq \pm 1$

مثال 12

احسب قيمة كلاً مما يأتي :-

$$\sin 75^0 \quad , \cos 15^0 \quad , \tan 105^0$$

الحل

1) $\sin 75^0$

$$75^0 = 45^0 + 30^0$$

$$\sin 75^0 = \sin(45^0 + 30^0)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(45^0 + 30^0) = \sin 45^0 \cos 30^0 + \cos 45^0 \sin 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \sin 75^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

2) $\cos 15^0$

الطريقة الأولى:

$$15^0 = 45^0 - 30^0$$

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos 15^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

الطريقة الثانية:

$$15^0 = 60^0 - 45^0$$

$$\cos 15^0 = \cos(60^0 - 45^0)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(60^0 - 45^0) = \cos 60^0 \cos 45^0 + \sin 60^0 \sin 45^0$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \cos 15^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

3) $\tan 105^0$

$$105^0 = 60^0 + 45^0$$

$$\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0)$$

تكملة

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\, tan\,\beta}$$

$$tan(60^0+45^0) = \frac{tan\,60^0 + tan\,45^0}{1 - tan\,60^0\, tan\,45^0}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ tan\,105^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

مثال 13

أثبت أن :-

$$sin\,115^0\,cos\,25^0 - cos\,115^0\,sin\,25^0 = 1$$

الحل

$$sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\,cos\,\beta - cos\,\alpha\,sin\,\beta$$

$$L.H.S = sin\,115^0\,cos\,25^0 - cos\,115^0\,sin\,25^0$$

$$= sin(115^0 - 25^0)$$

$$= sin\,90^0$$

$$= 1 \qquad = R.H.S$$

مثال 14

جد قيمة α اذا علمت ان :-

$$\frac{tan\,2\alpha - tan\,\alpha}{1 + tan\,2\alpha\,tan\,\alpha} = \sqrt{3}$$

الحل

$$\because\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

بمقارنة الطرف الأيمن من القانون مع الطرف الأيسر من السؤال نحصل على

$$\tan(2\alpha-\alpha) = \sqrt{3}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{3}$$

$$\because\ \tan\alpha > 0$$

$\therefore$ α تقع اما في الربع الاول أوفي الربع الثالث

$$\because\ \sqrt{3} = \tan 60^0$$

$$\therefore\ \tan\alpha = \tan 60^0$$

1- في الربع الأول $\quad \therefore\ \alpha = 60^0$

2--في الربع الثالث $\quad \alpha = 180^0 + 60^0 = 240^0$

$$S.S = \{60^0,\quad 240^0\}$$

تمارين (4-3)

1. احسب قيمة كلاً مما يأتي :-

$$\sin 15^0 \quad , \quad \cos 105^0 \quad , \quad \cos 135^0 \quad , \quad \tan 75^0$$

2. اثبت كلا مما يأتي :-

$$a)\ \cos 183^0 \cos 153^0 + \sin 183^0 \sin 153^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b)\ \frac{\tan 27^0 + \tan 18^0}{1 - \tan 27^0 \tan 18^0} = 1$$

$$c)\ \cos(120^0 - 45^0) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

4–4 الدوال الدائرية لضعف الزاوية

لكل عدد حقيقي α فان :-

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

مثال 15

أوجد $\cos 2\alpha$ اذا علمت ان :- $\sin\alpha = \frac{5}{8}$ $\quad 0 < \alpha < 90^0$

الحل

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\left(\frac{5}{8}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{25}{64} = 1 - \frac{25}{32}$$

$$= \frac{32 - 25}{32} = \frac{7}{32}$$

مثال 16

جد قيمة المقدار :- $\sin 22.5^0 \cos 22.5^0$

الحل

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

تكملة

$$\sin 22.5^0 \ \cos 22.5^0 = \frac{\sin 2(22.5^0)}{2} = \frac{\sin 45^0}{2}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال 17

اثبت أن :- $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

الحل

$$3\alpha = 2\alpha + \alpha \Rightarrow \cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha)$$

$$\begin{aligned}
L.H.S &= \cos(3\alpha) \\
&= \cos(2\alpha + \alpha) \\
&= \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha \\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\ \cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
&= R.H.S
\end{aligned}$$

مثال 18

جد قيمة كلاً من :- $\sin\alpha \ , \ \cos\alpha \ , \ \tan\alpha$

أذا كان $\cos(2\alpha) = \frac{7}{25}$ ، $0 < 2\alpha < 90^0$

الحل

1) $\sin\alpha$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\frac{7}{25} = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$2\sin^2\alpha = 1 - \frac{7}{25} = \frac{25-7}{25} = \frac{18}{25}$$
$$\frac{1}{2} \times 2\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{18}{25}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

$\because$ $\cos(2\alpha)$ تنتمي الى الربع الأول

$$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

2) $\cos\alpha$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\frac{7}{25} = 2\cos^2\alpha - 1$$

تكملة

$$2cos^2\alpha = 1 + \frac{7}{25} = \frac{25+7}{25}$$

$$2cos^2\alpha = \frac{32}{25}$$

$$\frac{2}{2}cos^2\alpha = \frac{\frac{32}{25}}{2}$$

$$cos^2\alpha = \frac{32}{2\times 25} \Rightarrow \quad cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow cos\,\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

$\because$ $cos(2\alpha)$ تنتمي الى الربع الأول

$$\therefore \quad cos\,\alpha = \frac{4}{5}$$

3) $tan\,\alpha$

$$tan\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}\times\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال 19

اثبت أن :- $csc(2\alpha) = \frac{1}{2}\,csc\,\alpha\,sec\,\alpha$

الحل

$$L.H.S = \csc(2\alpha) = \frac{1}{\sin(2\alpha)} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\csc\alpha\sec\alpha$$

$$= R.H.S$$

تمارين (4-4)

1. جد قيمة كلاً من :- $sin(2\alpha)\,,\quad cos(2\alpha),\quad tan(2\alpha)$

أذا كان $sin\,\alpha = \frac{3}{5}$, بحيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2. جد قيمة كلاً من :- $\sin\alpha\,,\quad \cos\alpha,\quad \tan\alpha$

أذا كان $\cos(2\alpha) = \frac{24}{25}$ ، بحيث $0 < 2\alpha < 90^0$

3. اوجد قيمة المقدار :-

$$\cos^2 15^0 - sin^2 15^0$$

4.اوجد قيمة المقدار :-

$$\frac{2\tan 22.5^0}{1 - tan^2 22.5^0}$$

5. اثبت أن :-

$$1 - sin^2(2\alpha) = 1 - 4sin^2\alpha + 4sin^4\alpha$$

6.اثبت أن :-

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \tan 2\alpha$$

7. اثبت أن :-

$$\tan(\alpha) + \cot(\alpha) = 2\csc(2\alpha)$$

8.. اثبت أن :-

$$\frac{\cos(2\alpha)}{sin^2\alpha} = \cot^2\alpha - 1$$

4-5الدوال الدائرية لنصف الزاوية:

أولاً:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \alpha \in R$$

$$Either \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$Or \quad sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

ثانياً:

$$\cos\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \alpha \in R$$

$$Either \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$Or \quad cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

ثالثاً:

$$\tan\frac{\alpha}{2} \quad , \quad \alpha \in R$$

$$\text{Either} \quad \tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\text{Or} \quad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

مثال 20

جد باستخدام قانون نصف الزاوية $\sin 15^0$

الحل

$$15^0 = \frac{30^0}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{30^0}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 30^0}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\therefore \quad \sin 15^0 = \pm\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

مثال 21

اثبت أن :- $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha$

الحل

$$L.H.S = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha}{2} - \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$= \frac{1 + \cos\alpha - 1 + \cos\alpha}{2} = \frac{2\cos\alpha}{2}$$

$$= \cos\alpha$$

$$= R.H.S$$

مثال 22 جد $sin\frac{\alpha}{2}$

عندما $cos\,\alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

الحل

عندما $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ في الربع الثالث فأن:

أي: $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$

$$\therefore\ sin\frac{\alpha}{2} > 0 \quad , \quad cos\frac{\alpha}{2} < 0$$

$$sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{25+7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{32}{25} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{7}{25}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{25-7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

تمارين (4-5)

1. جد باستخدام قانون نصف الزاوية

$\sin 22^0 30'$, $\tan 15^0$, $\cos 15^0$

2. اثبت كلا مما يأتي :-

a) $1 - 2\,sin^2\left(\frac{\alpha}{4}\right) = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b) $2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = cos\,\alpha$

6-4 حل المثلث

يقصد بحل المثلث ايجاد العناصر المجهولة من معرفة عناصر معلومة فيه. للمثلث ستة عناصر وهي ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع ، لحله يجب معرفة ثلاثة عناصر من العناصر الستة.

لحل المثلث طرق مختلفة لكن في هذا الفصل نقتصر على طريقتين

الطريقة الاولى: باستخدام قانون الجيوب (sines)

الطريقة الثانية: باستخدام قانون جيوب التمام (cosines)

وفيما يأتي شرح لكل طريقة مع الامثلة والتمارين :

1-6-4 الطريقة الاولى: لحل المثلث بهذِهِ الطريقة نستخدم القانون التالي ويسمى قانون الجيوب sines

$$\frac{A`}{\sin A} = \frac{B`}{\sin B} = \frac{C`}{\sin C}$$

حيث :-

A, B, C رموز لرؤوس أو زوايا المثلث $A\,B\,C$

$A`, B`, C`$ رموز لأضلاع المثلث $A\,B\,C$ ، وهي تقابل الزوايا اعلاه على الترتيب.

مثال 23

حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه :-

$$A` = 2\ cm. \quad , \quad m\hat{C} = 105^\circ \quad , \quad m\hat{B} = 30^\circ$$

الحل

حيث ان مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$ أي :-

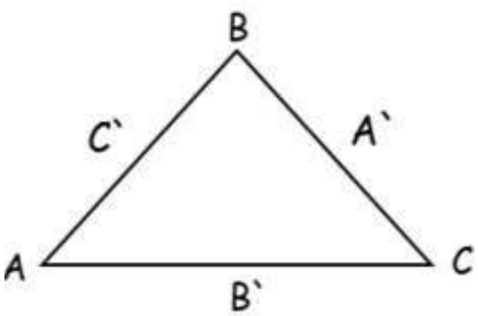
$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$
$$m\hat{A} + 30^\circ + 105^\circ = 180^\circ$$
$$m\hat{A} + 135^\circ = 180^\circ$$
$$m\hat{A} = 180^\circ - 135^\circ$$
$$m\hat{A} = 45^\circ.$$

و. هـ . م 1.

$$\frac{A`}{\sin A} = \frac{B`}{\sin B} = \frac{C`}{\sin C}$$

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{B`}{\sin 30^\circ} = \frac{C`}{\sin 105^\circ}$$

نجد قيم النسب المثلثية من جدول قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة



تكملة

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{B`}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{B`}{\frac{1}{2}}$$

$$2x\frac{\sqrt{2}}{1} = B` \times \frac{2}{1} \Rightarrow 2\sqrt{2} = 2B` \Rightarrow B` = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$B` = \sqrt{2}\ cm.$ و . هـ . م .2

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{C`}{\sin 105^\circ}$$

$\sin 105^\circ$

$105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ قانون

$\sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

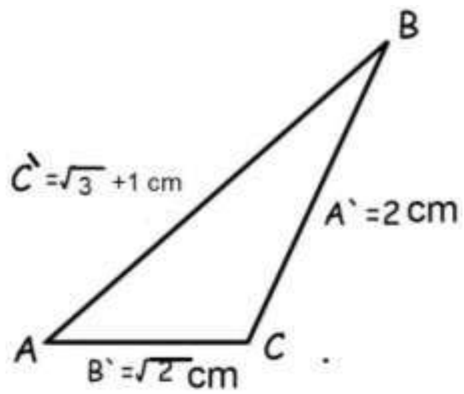
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{C`}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow 2 \times \frac{\sqrt{2}}{1} = C` \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}\,C`}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow 2\sqrt{2}\,C` = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) \Rightarrow$$

$C` = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3}+1)cm.$ و . هـ . م .3



مثال 24

حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه :-

$$B` = 24\,cm. \quad , \quad m\hat{A} = 35^{\circ} \quad , \quad m\hat{B} = 80^{\circ}$$

الحل

حيث ان مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^{\circ}$ أي :-

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^{\circ}$$

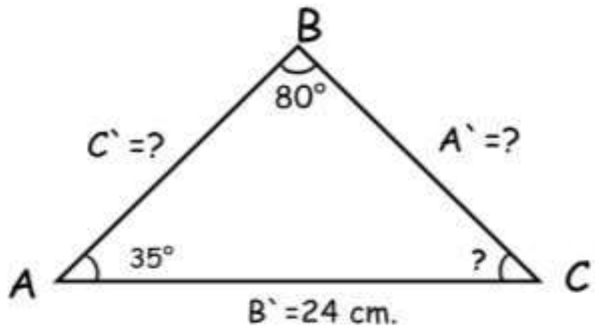
$$35^{\circ} + 80^{\circ} + m\hat{C} = 180^{\circ}$$

$$115^{\circ} + m\hat{C} = 180^{\circ}$$

$$m\hat{C} = 180^{\circ} - 115^{\circ}$$

$$m\hat{C} = 65^{\circ}.$$

و. هـ . م 1.



$$\frac{A`}{\sin A} = \frac{B`}{\sin B} = \frac{C`}{\sin C}$$

$$\frac{A`}{\sin A} = \frac{B`}{\sin B}$$

$$\frac{A`}{\sin 35^{\circ}} = \frac{24}{\sin 80^{\circ}}$$

$$A` \sin 80^{\circ} = 24 \sin 35^{\circ}$$

نجد قيم النسب المثلثية باستخدام ألحاسبة اليدوية

$$A` = \frac{24 \sin 35^{\circ}}{\sin 80^{\circ}} = \frac{24 \times 0.574}{0.985}$$

$$= \frac{13.776}{0.985}$$

$$= 13.985$$

$$A` \simeq 14\,cm.$$

و. هـ . م 2.

$$\frac{B`}{\sin B} = \frac{C`}{\sin C}$$

$$\frac{24}{\sin 80^{\circ}} = \frac{C`}{\sin 65^{\circ}}$$

$$C` \sin 80^{\circ} = 24 \sin 65^{\circ}$$

$$C` = \frac{24 \sin 65^{\circ}}{\sin 80^{\circ}}$$

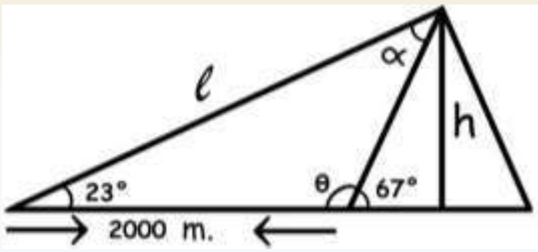
$$= \frac{24 \times 0.906}{0.985}$$

$$= \frac{21.751}{0.985} = 22.08 \simeq 22.1\,cm.$$

و. هـ . م 3.

مثال 25

عربة حمل سياحية معلقة بسلك حديدي تحمل سائحين من موقع على مستوي سطح الارض الى موقع سياحي على قمة جبل كما هو موضح تفاصيلها في الشكل الاتي جد :-
أولاً طول السلك الحديدي ، ثانياً ارتفاع الجبل.



الحل

نجد أولاً قيمة الزاوية θ بين الجبل ومستوى سطح الارض

زاوية اي مستقيم تساوي 180°

$$\theta + 67^\circ = 180^\circ$$
$$\theta = 180^\circ - 67^\circ$$
$$\theta = 113^\circ$$

والآن نجد قيمة الزاوية α

مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

$$\alpha + \theta + 23^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + 113^\circ + 23^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha + 136^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 136^\circ$$
$$\alpha = 44^\circ$$

$$\frac{2000}{\sin\alpha} = \frac{\text{طول السلك}}{\sin\theta}$$
$$\frac{2000}{\sin 44^\circ} = \frac{\ell}{\sin 113^\circ}$$
$$\ell . \sin 44^\circ = 2000 \sin 113^\circ$$
$$\ell = \frac{2000 \times \sin 113^\circ}{\sin 44^\circ} = \frac{2000 \times 0.920504853}{0.69465837}$$
$$\ell = \frac{2000 \times 0.921}{0.695} = \frac{1842}{0.695} \simeq 2650\ m.$$

والأن نجد ارتفاع الجبل

$$\sin 23^\circ = \frac{\text{ارتفاع الجبل}}{\text{طول السلك}}$$
$$0.391 = \frac{h}{2650} \Rightarrow h = 0.391 \times 2650 \simeq 1035\ m.$$

تمارين (6-4)

1. حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه -:

$$A` = \sqrt{6}\ in. \quad , \quad C` = 2\ in. \quad , \quad m\hat{A} = 60^\circ$$

2. حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه -:

$$A` = 39\ mm. \quad , \quad m\hat{B} = 110^\circ \quad , \quad m\hat{C} = 32^\circ$$

3. القمر الصناعي نايل سات يدور في مداره بالقرب من مدينتي بغداد والحلة فاذا كانت المسافة بين المدينتين $(100km.)$ وزاويتا التقاط البث في بغداد (80°) وفي الحلة (55°). جد ارتفاع القمـــر الصناعي ؟

(2-6-4) الطريقة الثانية: لحل المثلث بهذِهِ الطريقة نستخدم القانون التالي ويسمى قانون جيوب التمام(cosines)

$$A`^2 = B`^2 + C`^2 - 2B`C` \cos A$$
$$B`^2 = A`^2 + C`^2 - 2A`\,C` \cos B$$
$$C`^2 = A`^2 + B`^2 - 2A`\,B` \cos C$$

حيث -: $A\,,B\,,C$ تمثل رموز لزوايا المثلث $A\,B\,C$ ، $A`,B`,C`$ تمثل رموز لأضلاع المثلث $A\,B\,C$ وهي تقابل الزوايا اعلاه على الترتيب.

مثال 26 حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه -:

$$A` = \sqrt{6}\,unit \quad , \quad B` = \sqrt{3}+1\,unit \quad , \quad c` = 2\ unit$$

الحل

$$A`^2 = B`^2 + C`^2 - 2B`C`\ cos\,A$$

نكتب القانون بالصيغة التالية لتسهيل الحل عند ايجاد الزاوية

$$cos\,A = \frac{B`^2 + C`^2 - A`^2}{2\,B`\,C`}$$

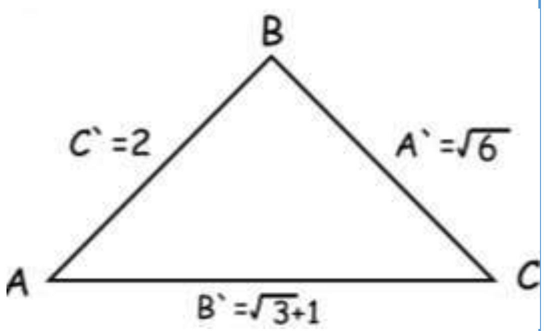
$$cos\,A = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (2)^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times (\sqrt{3}+1) \times 2}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1 + 4 - 6}{4(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+2}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ m\hat{A} = 60^\circ$$

و.هـ.م.1



$$cos\,C = \frac{A`^2 + B`^2 - C`^2}{2\,A`\,B`}$$

تكملة

$$\cos C = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - (2)^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}+1)} = \frac{6 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

$$\left(\cos C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ أو } \left(\cos C = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و . هـ . م . 2

$$m\hat{C} = 45^\circ$$

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

مجموع زوايا المثلث يساوي 180°

$$60^\circ + m\hat{B} + 45^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} + 105^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} = 180^\circ - 105^\circ$$

$$m\hat{B} = 75^\circ$$

و . هـ . م

مثال 27

حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه :-

$A` = 15\ unit \quad , \quad B` = 25\ unit \quad , \quad c` = 28\ unit$

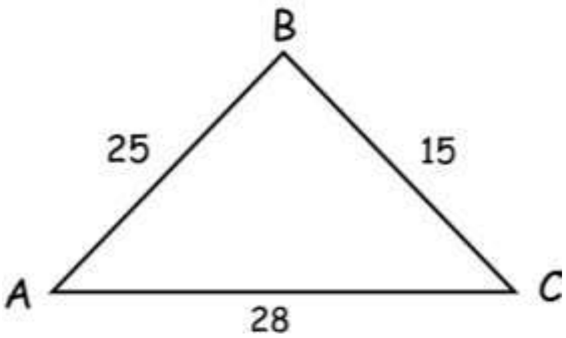
الحل

$$\cos A = \frac{B`^2 + C`^2 - A`^2}{2\,B`\,C`}$$

$$\cos A = \frac{25^2 + 28^2 - 15^2}{2 \times 25 \times 28}$$

$$= \frac{626 + 784 - 225}{1400}$$

$$= \frac{1184}{1400} = 0.845714285$$



$$m\hat{A} = 32.3^\circ$$

$$\cos C = \frac{A`^2 + B`^2 - C`^2}{2\,A`\,B`}$$

$$= \frac{225 + 625 - 784}{2 \times 15 \times 25} = \frac{66}{750} = 0.088$$

$$m\hat{C} = 85^\circ$$

تكملة

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$32.3^\circ + m\hat{B} + 85^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} + 117.3^\circ = 180^\circ$$

$$m\hat{B} = 180^\circ - 117.3^\circ = 62.7^\circ$$

مثال 28

حل المثلث $A\,B\,C$ الذي فيه :-

$$m\hat{B} = 95^\circ \quad , \quad A` = 16\ unit \quad , \quad C` = 7\ unit$$

الحل

$$B`^2 = A`^2 + C`^2 - 2A`\,C`\ \cos B$$

$$= 16^2 + 7^2 - 2 \times 16 \times 7 \times \cos 95^\circ$$

$$= 256 + 49 - 224 \times (-0.087)$$

$$= 305 + 19.488$$

$$= 324.488$$

$$B` \simeq 18\ unit$$

و . هـ . م .1

$$A`^2 = B`^2 + C`^2 - 2B`\,C`\ \cos A$$

$$16^2 = 18^2 + 7^2 - 2 \times 18 \times 7 \times \cos A$$

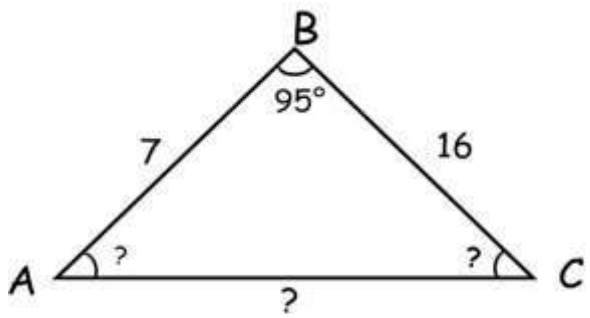
$$256 = 324 + 49 - 252\ \cos A$$

$$252 \cos A = 373 - 256$$

$$252 \cos A = 117$$

$$\cos A = \frac{117}{252} = 0.464$$

$$m\hat{A} = 62.3^\circ$$



و . هـ . م .2

$$m\hat{A} + m\hat{B} + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$62.3 + 95 + m\hat{C} = 180^\circ$$

$$m\hat{C} = 180^\circ - 157.3 = 22.7^\circ$$

و . هـ . م .3

تمارين (4-7)

1. حل المثلث ABC الذي فيه :-

$$m\hat{B} = 25^\circ \quad , \quad A` = 12\ cm. \quad , \quad c` = 15\ cm.$$

2. حل المثلث ABC الذي فيه :-

$$m\hat{A} = 95.7^\circ \quad , \quad B` = 3.2\ cm. \quad , \quad c` = 1.5\ cm.$$

3. حل المثلث ABC الذي فيه :-

$$A` = 18\ cm. \quad , \quad B` = 21\ cm. \quad , C` = 10\ cm.$$

7-4 المعادلات المثلثية Triangles Equations

المعادلة المثلثية :- هي جملة مفتوحة تحتوي على دالة مثلثية أو أكثر لزاوية معينة أو لعدة زوايا بعضها تحقق المعادلة والبعض الاخر لا تحققها.

مثال 29

حل المعادلة الاتية :-

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \quad , \text{عندما} \quad 0 \le x < 360^\circ$$

الحل

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ بتطبيق العلاقة الاتية :-

$$\sin\theta = |\sin x|$$

$$\therefore \sin\theta = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ \theta = 30^\circ$$

$\because \sin x > 0$ (موجب)

$\therefore$ $\hat{x}$ تقع اما في الربع الأول او في الربع الثاني

1) عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الاول فأن :

$$x = \theta$$

$$\therefore x = 30^\circ$$

2) عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الثاني فأن

$$x = 180^\circ - \theta$$

$$x = 180^\circ - 30^\circ$$

$$x = 150^\circ$$

$$\therefore S.S = \{30^\circ, 150^\circ\}$$

مثال 30

حل المعادلة الاتية :-

$\cos x + \frac{1}{2} = 0$ عندما $0 \le x < 360^\circ$

الحل

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ بتطبيق العلاقة الاتية :-

$$\cos\theta = |\cos x|$$

$$\cos\theta = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

$\because \ \cos x < 0$ (سالب)

$\therefore$ $\hat{x}$ تقع اما في الربع الثاني أو في الربع الثالث

1) عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الثاني فأن :

$$x = 180^\circ - \theta$$

$$x = 180^\circ - 60^\circ$$

$$x = 120^\circ$$

2) عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الثالث فأن :

$$x = 180^\circ + \theta$$

$$x = 180^\circ + 60^\circ$$

$$x = 240^\circ$$

$$\therefore S.S = \{120^\circ, 240^\circ\}$$

مثال 31

إذا علمت أن $0 \le x < 360^\circ$ حل المعادلة الاتية :-

$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

الحل

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$(\sin x - 2)(2\sin x + 1) = 0$$

$$either \quad \sin x - 2 = 0 \Rightarrow \sin x = 2$$

تهمل لان $-1 \le \sin x \le 1$

$$or \quad 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

نجد زاوية الاسناد θ باستخدام العلاقة التالية

$$\sin\theta = |\sin x|$$

$$\sin\theta = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

تكملة

$\because \sin x < 0$ (سالب)

$\therefore \hat{x}$ تقع اما في الربع الثالث أو في الربع الرابع

1- عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الثالث

$x = 180^\circ + \theta$

$x = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

2-عندما تقع $\hat{x}$ في الربع الرابع

$x = 360^\circ - \theta$

$x = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$

$\therefore S.S = \{210^\circ, 330^\circ\}$

تمارين (8-4)

حل المعادلات الاتية بحيث $0 \le x < 360^\circ$:-

1) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$

2) $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$

3) $2\cos x \sin x - \cos x = 0$

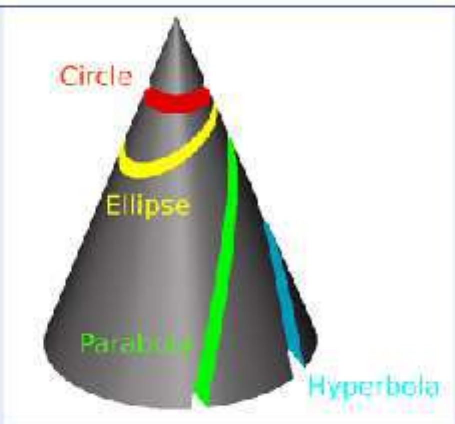
4) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

5) $3\tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$

6) $\sec^2 x - 6\sec x = 16$

7) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

الفصل الخامس



القطوع المخروطية
(الدائرة)

الفصل الخامس
القطوع المخروطية ـ الدائرة
(Conic sections-The circle)

البنود
(SECTIONS)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Center	$C(h,k)$	مركز الدائرة
Radius	r	نصف قطر الدائرة
Point	$P(x,y)$	النقطة في المستوي الإحداثي
The standard equation Of the circle	$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$	الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة
The general equation Of the circle	$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ $h=\frac{-A}{2}$, $k=\frac{-B}{2}$ $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$	الصيغة العامة لمعادلة الدائرة
The equation of the tangent of the circle	$\boxed{xx_1+yy_1-h(x+x_1)-k(y+y_1)+c=0}$	إيجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة التماس (x_1,y_1)

تعلمنا سابقا :-

- قطر الدائرة هو قطعة المستقيم الواصلة بين أي نقطتين عليها وتمر بمركزها.
- وتر الدائرة هو قطعة المستقيم الواصلة بين أي نقطتين عليها ولا تمر بمركزها.
- مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف قطرها المرسوم من نقطة التماس.
- المسافة بين نقطتين في المستوي الإحداثي $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- البعد العمودي بين نقطة ومستقيم في المستوي الإحداثي $d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- نقطة منتصف قطعة مستقيم في المستوي الإحداثي $C(x,y)=C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$
- ميل المستقيم في المستوي الإحداثي $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل $y-y_1=m(x-x_1)$

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- الاشكال التي تتولد من قطع المخروط الدائري القائم بمستويات مختلفة ومسمياتها.
- مفهوم الدائرة كأحد القطوع المخروطية
- استخراج معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل.
- استخراج معادلة الدائرة التي مركزها اية نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة).
- استخراج معادلة الدائرة التي لها تماس مع المحورين الاحداثيين.
- استخراج معادلة الدائرة التي تمس مستقيماً معلوماً.
- استخراج المركز ونصف القطر للدائرة باستعمال الصيغة العامة لمعادلة الدائرة.
- تعيين نوع العلاقة بين نقطة معلومة ودائرة معلومة.
- تعيين نوع العلاقة بين مستقيم معلوم ودائرة معلومة.
- استخراج معادلة مماس الدائرة عند نقطة من نقاطها.

الفصل الخامس

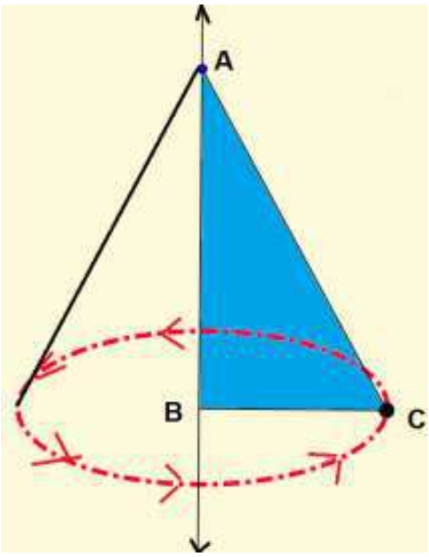
القطوع المخروطية –الدائرة

$(Conic\ sections - The\ circle)$

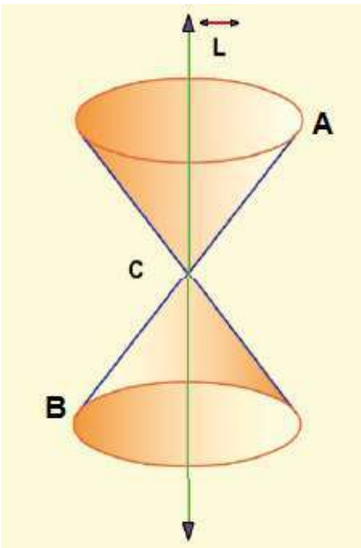
1-5 القطوع المخروطية

يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث ABC القائم الزاوية في B دورة كاملة حول احد الضلعين القائمين كمحور للدوران كما في الشكل 5-1 اما في الشكل 5-2 فإننا نلاحظ انه ينتج عن دوران مستقيم حول محور ثابت بزاوية ثابتة بينهما مخروط دائري قائم وان مولدي المخروط يتقاطعان عند الرأس C.

يسمى $\overleftrightarrow{L}$ محور المخروط والذي يمكن ان نعرّفه بانه (قطعة المستقيم المحددة براس المخروط ومركز قاعدته)، ويسمى $\overline{AB}$ مولد المخروط والذي يمكن ان نعرّفه بانه (قطعة المستقيم المحددة براس المخروط وإحدى نقاط قاعدته).



الشكل 5-1



الشكل 5-2

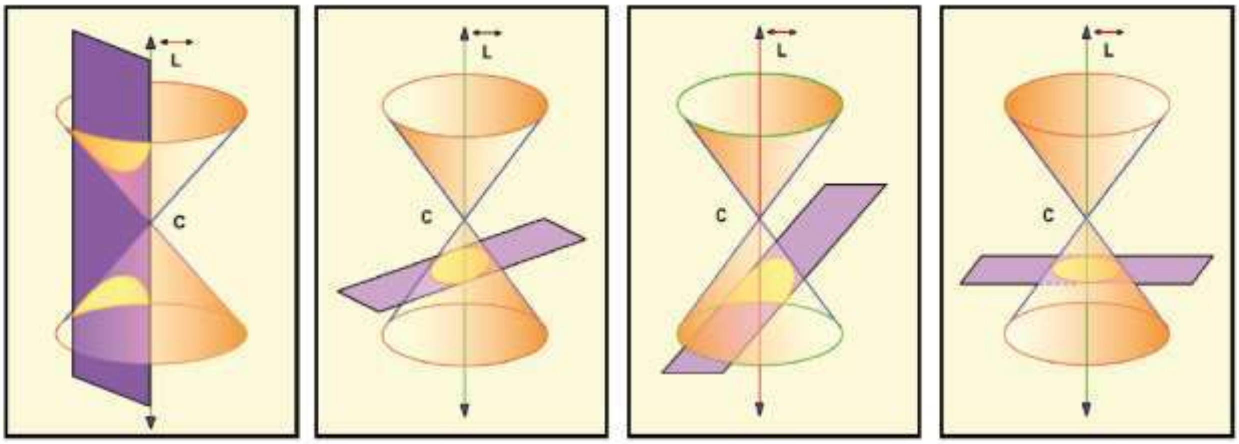
ان الاشكال الهندسية الناتجة من قطع المخروط الدائري القائم بمستوٍ في حالات معيّنة تسمى قطوعاً مخروطية وهي: -

(1) الدائرة ($Circle$): ونحصل عليها من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ عمود على المحور $\overleftrightarrow{L}$ ويوازي القاعدة، وتكبر هذه الدائرة كلما ابتعدنا عن الراس كما في الشكل 5-3.

(2) القطع المكافئ ($Parabola$) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ موازٍ لأحد مولداته كما في الشكل 5-4.

(3) القطع الناقص ($Ellipse$) : ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته كما في الشكل 5-5.

(4) القطع الزائد $(Hyperbola)$: ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوٍ موازٍ لمحوره ويقطع مولدين من مولداته كما في الشكل 5-6 .



القطع الزائد
الشكل 5-6

القطع الناقص
الشكل 5-5

القطع المكافيء
الشكل 5-4

الدائرة
الشكل 5-3

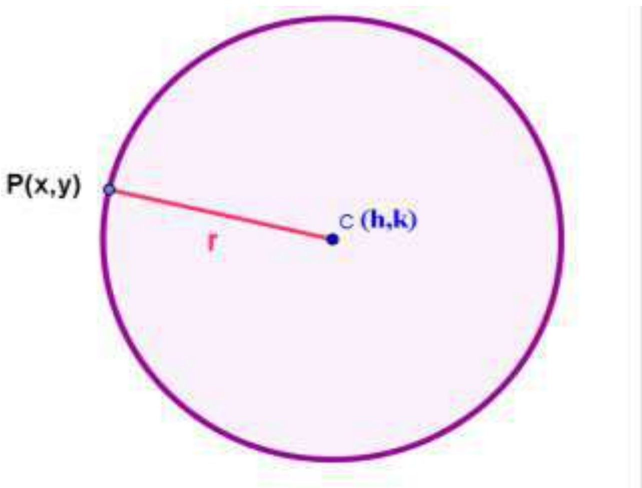
5-2 الدائرة (Circle)

5-2-1 تعريف الدائرة :-

هي مجموعة النقط في المستوي التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز $Center$) يساوي مقداراً ثابتاً غير سالب يسمى (نصف القطر $Radius$) .سوف نرمز لمركز الدائرة بالرمز C ونرمز لنصف القطر بالرمز r . وبلغة المجموعات يمكننا تعريف الدائرة كما يأتي: -

$$Circle = \{p : \overline{pc} = r, r > o\}$$

حيث $P(x,y)$ هي نقطة تنتمي الى الدائرة. كما في الشكل 5-7 ادناه :-

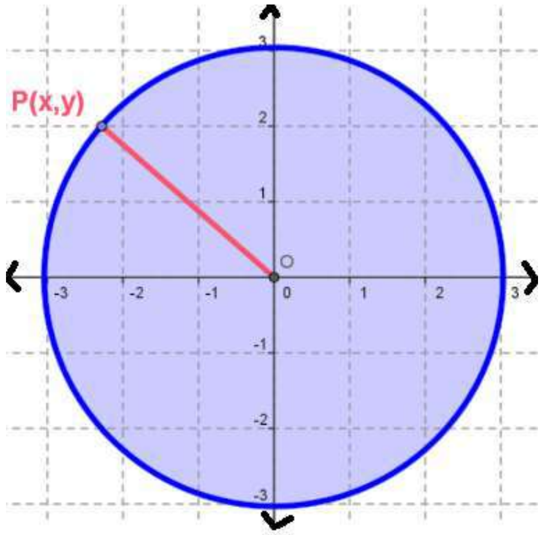


الشكل 5-7

3-5 معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل

في هذا البند سوف نجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها r في المستوي الاحداثي.

لتكن $P(x,y)$ اي نقطة في المستوي[لاحظ الشكل 5-8 أدناه]، المسافة $\overline{OP}$ بين نقطة الاصل $O(0,0)$ والنقطة P يمكن استخراجها بقانون المسافة بين نقطتين وكما يأتي :-



الشكل 5-8

$$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :- $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

وهذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها r .

مثال 1

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها 5 وحدات، ثم تحقق من ان النقطة $(4,3)$ تنتمي لها.

الحل

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{(المعادلة المطلوبة)}$$

وللتحقق من ان النقطة $(4,3)$ تنتمي للدائرة نعوض $(x = 4 \ , y = 3)$ في معادلة الدائرة أي :-

$$4^2 + 3^2 = 25$$

$$16 + 9 = 25$$

وهي عبارة صائبة، وهذا يعني ان النقطة $(4,3)$ تحقق معادلة الدائرة مما يعني انها تنتمي للدائرة.

4-5 معادلة الدائرة التي مركزها اية نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة)

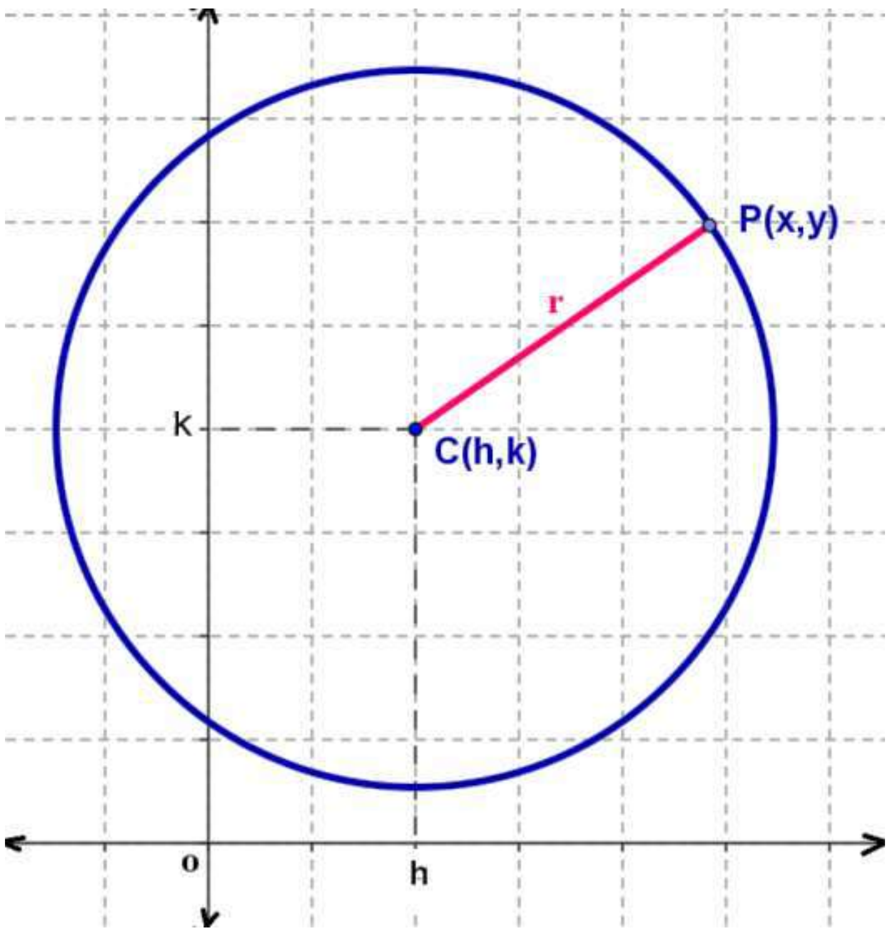
من تعريف الدائرة نستنتج ان بعد اية نقطة $P(x, y)$ تنتمي للدائرة [لاحظ الشكل 5-9 أدناه] عن مركز الدائرة $C(h, k)$ مساوياً لطول نصف قطرها (r) وبموجب قانون المسافة بين نقطتين أيضاً يكون :-

$$\overline{CP} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على: -

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

هذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي مركزها $C(h, k)$ ونصف قطرها r والتي يطلق عليها اسم الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة.



الشكل 5-9

مثال 2

جد معادلة الدائرة التي مركزها $C(2,-3)$ ونصف قطرها 5 وحدات.

الحل

$$\because\ C(h,k) = C(2,-3) \Rightarrow\ h = 2, k = -3\quad ,\qquad r = 5\ \ units$$

بالتعويض في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة وهي :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

نحصل على: -

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

مثال 3

جد معادلة الدائرة التي مركزها $C(2,-1)$ وتمر بنقطة الاصل $O(0,0)$.

الحل

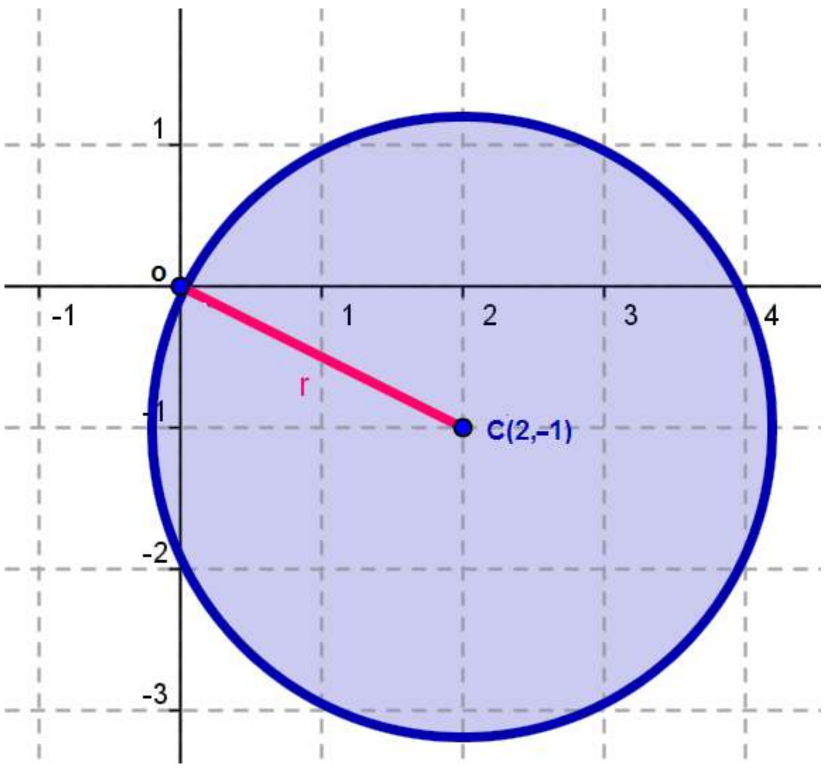
حيث ان الدائرة تمر بنقطة الاصل فان نصف قطرها $r = CO$ كما في الشكل5-10ادناه

أي :-

$$r = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ units$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$



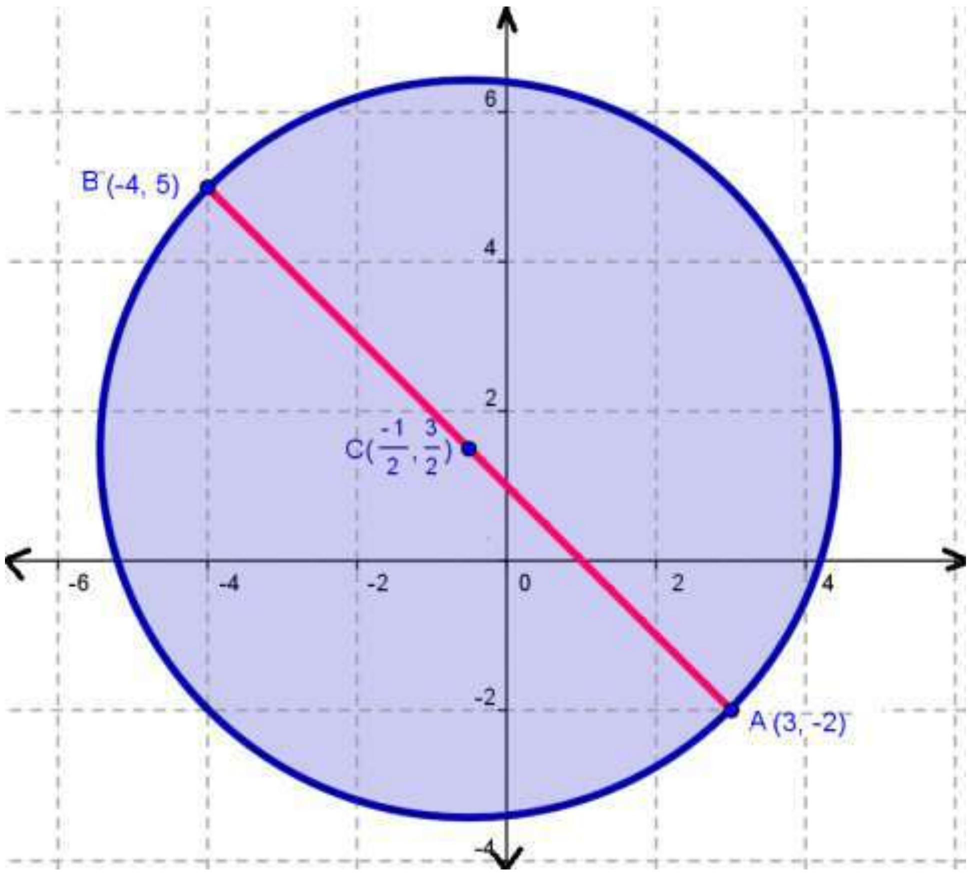
الشكل5-10

مثال 4

جد معادلة الدائرة التي نهايتا أحد أقطارها النقطتان $A(3,-2), B(-4,5)$

الحل

حيث ان مركز الدائرة $C(h,k)$ هو نقطة المنتصف لقطعة المستقيم $\overline{AB}$ (الذي يمثل قطر الدائرة) كما في الشكل 5-11 ادناه لذلك يكون :-



الشكل 5-11

$$h = \frac{3+(-4)}{2} = \frac{-1}{2} \quad , \quad k = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow C(h,k) = C\left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

أما نصف قطر الدائرة فهو المسافة بين النقطة C واحدى النقطتين A , B ولنأخذ النقطة A :-

$$r = \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}} = \frac{\sqrt{98}}{2} \ units$$

وبالتعويض عن قيم r, h, k في الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة نحصل على :-

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{98}{4}$$

مثال 5

جد إحداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها :

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 16$$

الحل

بالمقارنة مع الصيغة القياسية $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ نستنتج ان :-

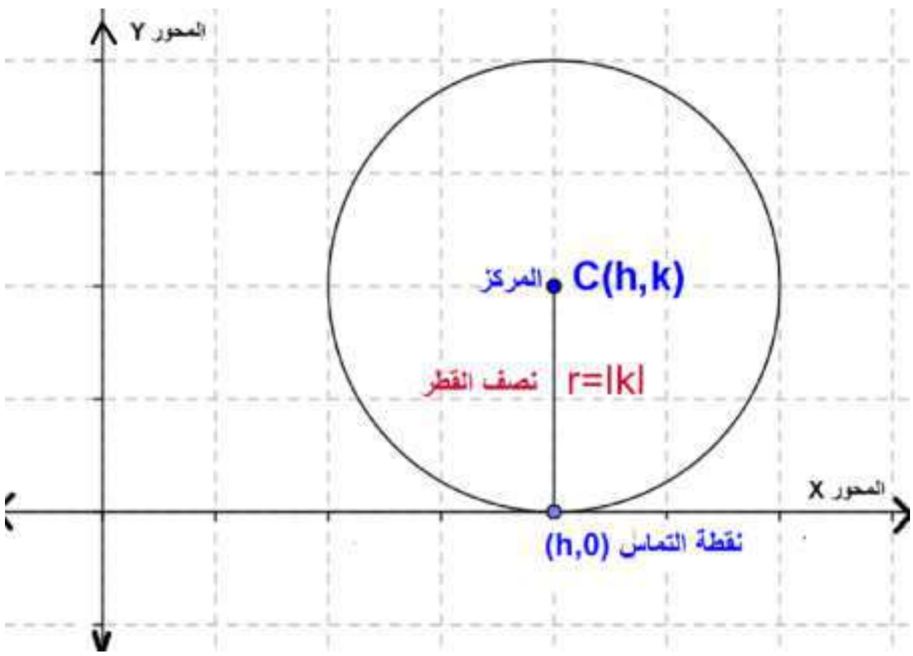
$$h = 5 \quad , k = -3 \quad , \qquad r = 4\ units$$

ولذلك فان المركز $C(h,k) = C(5,-3)$ ونصف القطر يساوي 4 وحدة .

5-5 تماس الدائرة مع المحورين الاحداثيين

اولاً: الدائرة التي تمس المحور x يكون $r = |k|$ وتكون نقطة التماس $(h,0)$ كما في الشكل 12-5 ادناه وتكون معادلة الدائرة:

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2}$$



الشكل 12-5

مثال 6

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(5,-3)$ وتمس المحور x ثم جد نقطة التماس.

الحل

$$r = |k| = |-3| = 3\ units$$

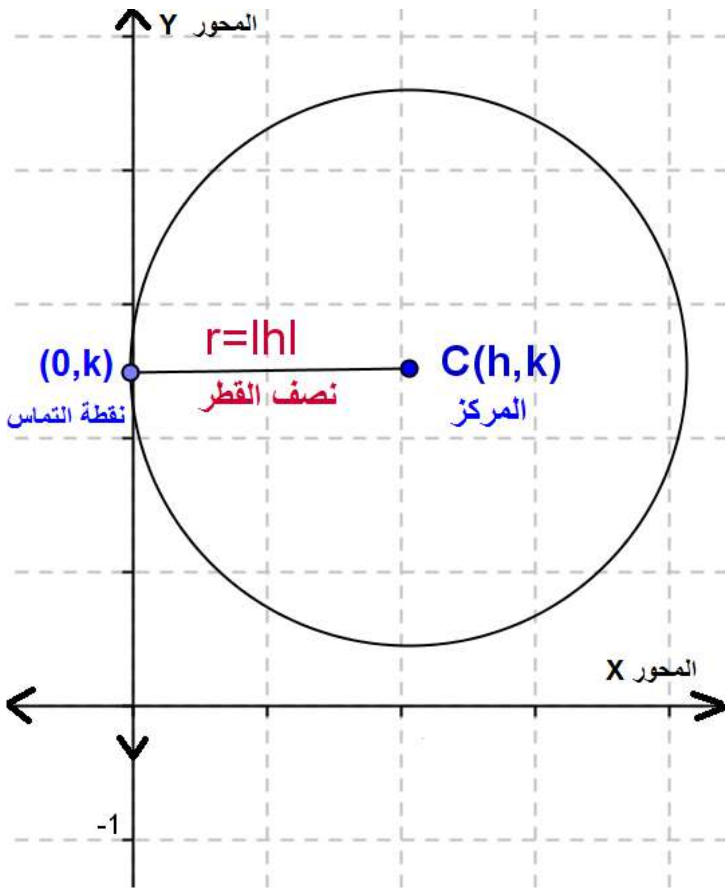
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 9$$

وتكون نقطة التماس هي : $(h,0) = (5,0)$

ثانياً: الدائرة التي تمس المحور y يكون $r = |h|$ وتكون نقطة التماس $(0, k)$ كما في الشكل 13-5 ادناه:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$$



الشكل 13-5

مثال 7

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-5, -3)$ وتمس المحور y ثم جد نقطة التماس.

الحل

$$r = |h| = |-5| = 5 \; units$$

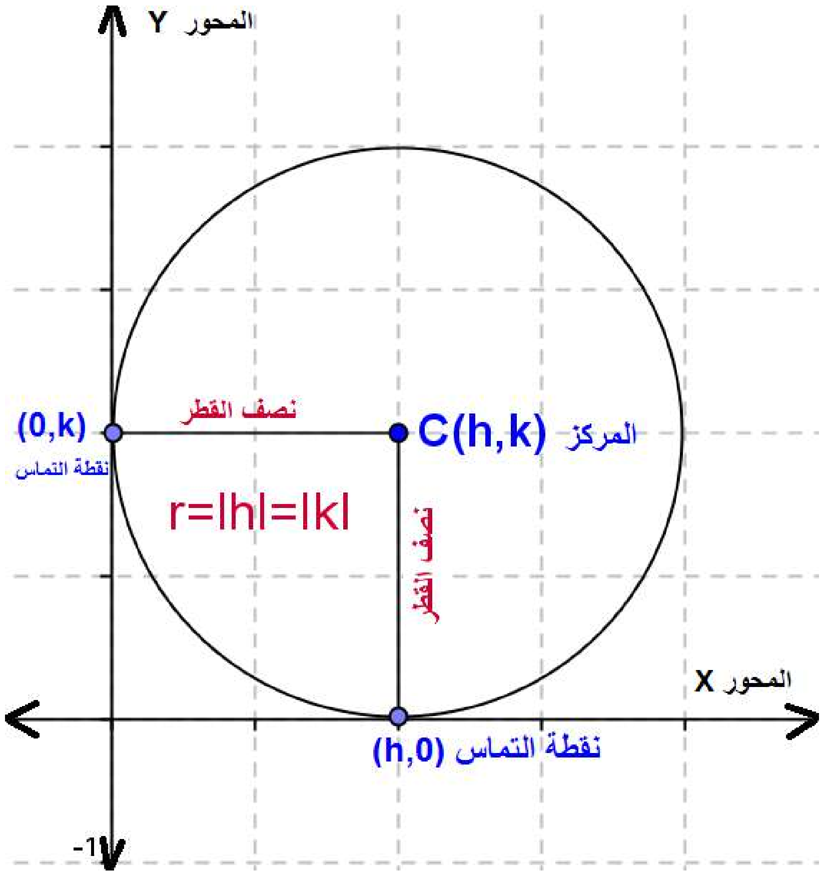
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

وتكون نقطة التماس هي : $(0, k) = (0, -3)$

ثالثاً: الدائرة التي تمس المحورين معاً يكون $r = |h| = |k|$ وتكون نقطتا التماس هما $(0, k)$ ، $(h, 0)$ كما في الشكل 5-14 ادناه:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2 = k^2$$



الشكل 5-14

مثال 8

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(6, -6)$ وتمس المحورين ثم جد نقطتي التماس.

الحل

$$r = |h| = |k| = 6 \ \ units$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$$

وتكون نقطتا التماس هما :-

$$(0, k) = (0, -6)$$

$$(h, 0) = (6, 0)$$

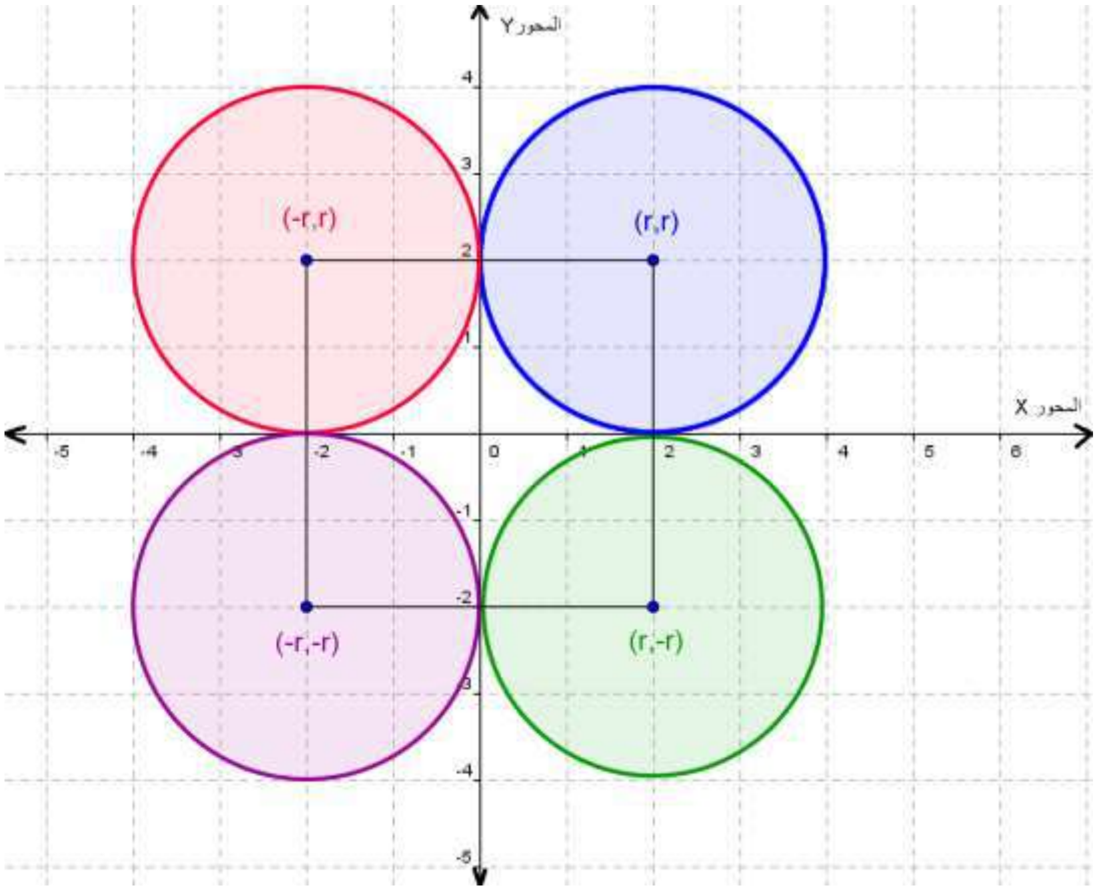
الشكل 5-15 ادناه يوضح جميع حالات تماس الدائرة مع المحورين، لاحظ انه يمكننا ان نكتب احداثيي مركز الدائرة كما يأتي لكل حالة نظراً لكون $r = |h| = |k|$

في الربع الأول $\quad C(h,h) = C(k,k) = C(r,r)$

في الربع الثاني $\quad C(-h,h) = C(-k,k) = C(-r,r)$

في الربع الثالث $\quad C(-h,-h) = C(-k,-k) = C(-r,-r)$

في الربع الرابع $\quad C(h,-h) = C(k,-k) = C(r,-r)$



الشكل 5-15

مثال 9

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (2,4) .

الحل

الدائرة تقع في الربع الاول لأنها تمس المحورين وتمر بالنقطة (2,4) ولذلك فان مركزها سوف يكون $C(h,h) = C(r,r)$ اي ان معادلة الدائرة هي :-

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

وحيث ان الدائرة تمر بالنقطة (2,4) فإنها تحقق معادلتها اي اننا نعوض $x = 2\,,\ y = 4$ في المعادلة

$$(2-r)^2 + (4-r)^2 = r^2$$

$$4 - 4r + r^2 + 16 - 8r + r^2 = r^2$$

تكملة

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$
$$(r-10)(r-2) = 0$$

أما :

$$r - 10 = 0$$
$$r = 10 \quad Units$$
$$\therefore \ C(10,10) \text{ مركز الدائرة}$$

وتكون معادلة الدائرة :-

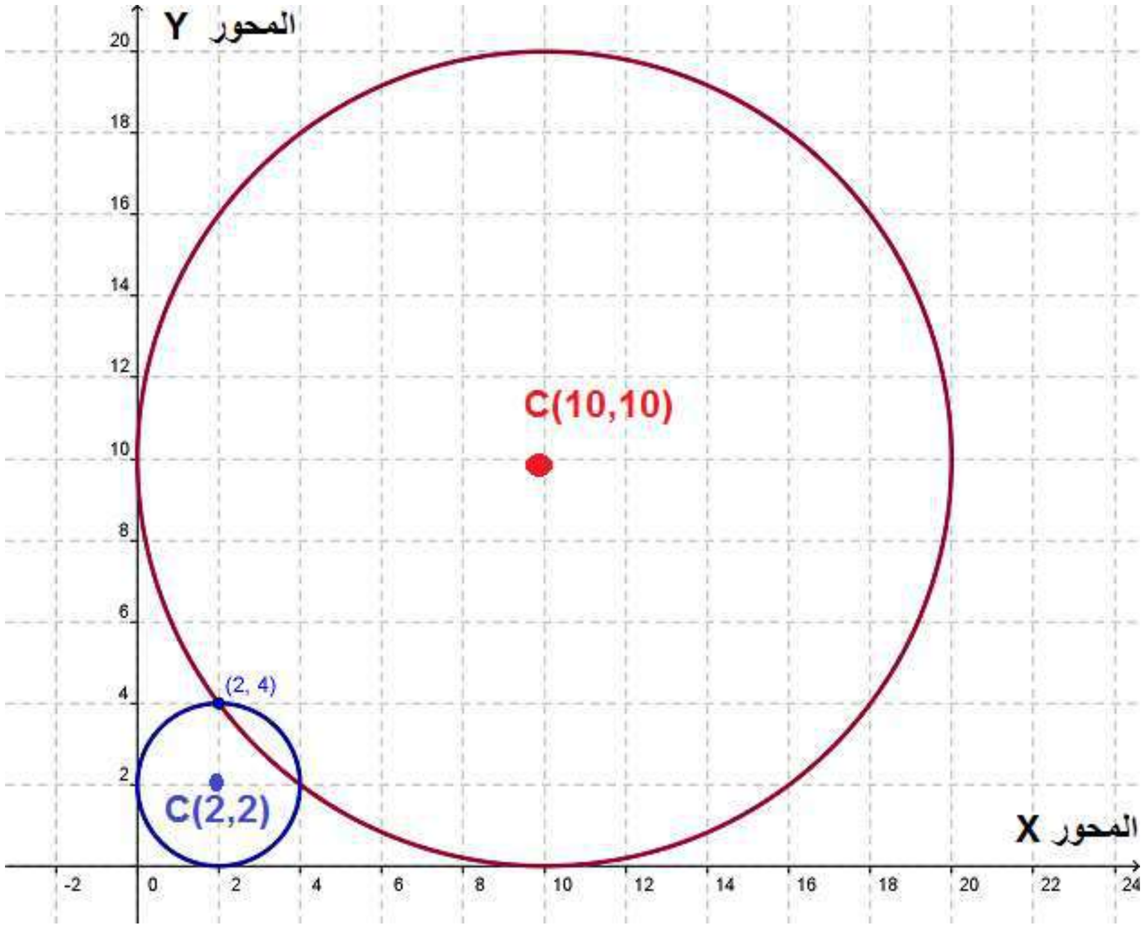
$$(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$$

أو :

$$r - 2 = 0$$
$$r = 2 \quad Units$$
$$\therefore \ C(2,2) \text{ مركز الدائرة}$$

وتكون معادلة الدائرة :-

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

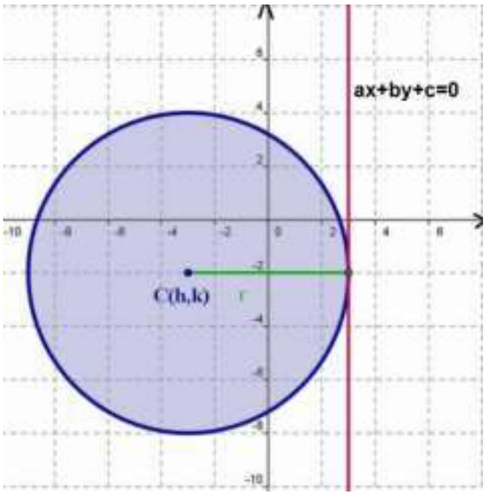


الشكل 5-16

5-6 معادلة الدائرة التي تمس مستقيماً معلوماً

من الواضح في الشكل 5-17 ادناه ان البعد العمودي بين المستقيم ومركز الدائرة يساوي طول نصف قطر الدائرة وعليه فانه بالإمكان ايجاد نصف القطر باستخدام قانون البعد العمودي بين المستقيم $ax + by + c = 0$ والنقطة (x_1, y_1) الذي درسناه في الصف الاول وهو:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



الشكل 5-17

مثال 10

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وتمس المستقيم $4x - 3y = 15$.

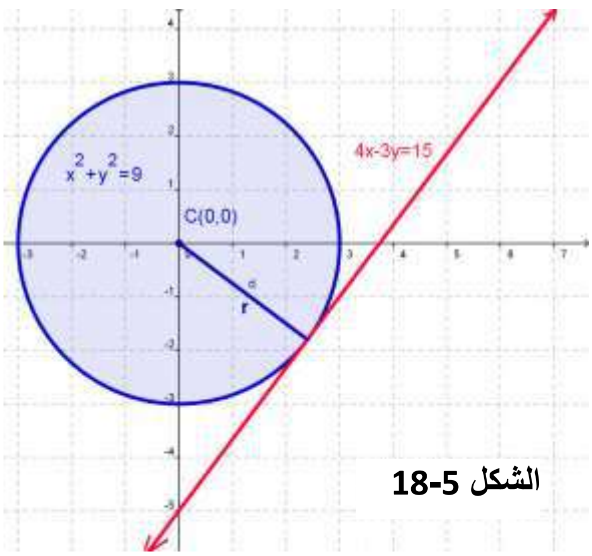
الحل

ان البعد العمودي بين مركز الدائرة وهو نقطة الاصل اي $O(0,0)$ والمستقيم الذي معادلته $4x - 3y - 15 = 0$ يساوي طول نصف قطر الدائرة.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r = \frac{|4 \times 0 + (-3) \times 0 + (-15)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$r = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3\ units$$



الشكل 5-18

وحيث ان معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل هي :-

$$x^2 + y^2 = r^2$$

لذلك فان معادلة الدائرة هي: -

$$x^2 + y^2 = 9$$

7-5 الصيغة العامة لمعادلة الدائرة

ان الصيغة العامة لمعادلة الدائرة تنتج من تبسيط الصيغة القياسية لها وكما يأتي :-

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=r^2$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2-r^2=0$$

نعيد ترتيب الحدود لتكون كما يأتي :-

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

وبفرض ان : $A=-2h \quad , B=-2k \quad , C=h^2+k^2-r^2$ ، نحصل على الصيغة العامة وهي :-

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

أي إن :-

$$\boxed{h=\frac{-A}{2} \quad , \quad k=\frac{-B}{2}}$$

$$, r^2=h^2+k^2-c$$

$$\boxed{r=\sqrt{h^2+k^2-c}}$$

ونستطيع ان نقول ان مركز الدائرة هو $C\left(\frac{-A}{2},\frac{-B}{2}\right)$ وان نصف قطرها هو $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

كما يمكننا التوصل الى الاستنتاجات الاتية :-

1. معادلة الدائرة معادلة من الدرجة الثانية بمتغيرين هما $x \; , \; y$.
2. معامل x^2 يساوي معامل y^2 (ويجب ان يكون 1) .
3. المعادلة لا تحتوي على الحد xy .
4. $\left(r=\sqrt{h^2+k^2-c}\right)\in\mathbb{R}^+$.

ملاحظة :- إذا كانت الدائرة تمر بنقطة الاصل $O(0,0)$ فان الصيغة العامة لمعادلتها يمكن الحصول عليها بتعويض $x=0 \;\; , y=0$ في الصيغة القياسية لتكون :-

$$(0-h)^2+(0-k)^2=r^2$$

$$h^2+k^2=r^2$$

وبالتعويض في الصيغة القياسية نحصل على :-

$$(x-h)^2+(y-k)^2=h^2+k^2$$

$$x^2-2xh+h^2+y^2-2yk+k^2=h^2+k^2$$

$$x^2+y^2-2xh-2yk=0$$

$$\boxed{x^2+y^2+Ax+By=0}$$

مثال 11 جد احداثيي المركز وطول نصف القطر إذا كانت المعادلة تمثل معادلة دائرة في كل مما يأتي :-

1) $x^2+y^2-4x+6y=5$
2) $x^2+y^3+7x-2y=25$
3) $x^2-y^2-9x+16y=50$
4) $x^2+y^2-4x+7xy+6y=8$
5) $x^2+2y^2-8x+5y=12$
6) $x^2+y^2-2x+6y+19=0$
7) $3x^2+3y^2-12x+24y+33=0$

الحل

1) $x^2+y^2-4x+6y=5$

$$x^2+y^2-4x+6y-5=0$$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2 \quad , \quad k=\frac{-B}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \quad \Rightarrow C=(2,-3)$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{2^2+(-3)^2-(-5)}=\sqrt{4+9+5}=\sqrt{18}\,units$$

2) $x^2+y^3+7x-2y=25$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كونها معادلة من الدرجة الثالثة.

3) $x^2-y^2-9x+16y=50$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون معامل x^2 يساوي 1 ولا يساوي معامل y^2 الذي يساوي -1

4) $x^2+y^2-4x+7xy+6y=8$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كونها تحتوي الحد xy

5) $x^2+2y^2-8x+5y=12$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون معامل x^2 يساوي 1ومعامل y^2 يساوي 2 اي انهما غير متساويين .

6) $x^2+y^2-2x+6y+19=0$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1 \quad , \quad k=\frac{-B}{2}=\frac{-6}{2}=-3 \quad \Rightarrow C=(1,-3)$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+9-19}=\sqrt{-9}$$

المعادلة هنا لا تمثل دائرة بسبب كون $r\notin\mathbb{R}^+$.

7) $3x^2+3y^2-12x+24y+33=0$

نجعل معامل x^2 يساوي معامل y^2 ويساوي 1 بقسمة المعادلة على العدد 3 لتصبح كالاتي :-

$$x^2+y^2-4x+8y+11=0$$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2 \quad , \quad k=\frac{-B}{2}=\frac{-8}{2}=-4 \quad \Rightarrow C=(2,-4)$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{4+16-11}=\sqrt{9}=3\,units$$

مثال 12

جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها كالاتي ثم حولها الى الصيغة العامة.

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9$$

الحل

بالمقارنة مع الصيغة القياسية

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$h=3\,,k=-2 \Rightarrow\ C(h,k)=C(3,-2)$ المركز

$r^2=9 \Rightarrow r=3\ units$ نصف القطر

وللتحويل الى الصيغة العامة نقوم بفتح الاقواس وترتيب الحدود في المعادلة الاصلية كالآتي :-

$$x^2-6x+9+y^2+4y+4=9$$

$$x^2+y^2-6x+4y+4=0$$

مثال 13

إذا كانت $dx^2+4y^2+ax+by+c=0$ تمثل معادلة دائرة مركزها $(2,-3)$ وطول نصف قطرها $5\ units$ جد قيمة الثوابت a,b,c,d.

الحل

حيث ان معامل x^2 يجب ان يساوي معامل y^2 لذلك فان $d=4$

وبما ان المركز $C(h,k)=C(2,-3)$ ، لذلك تكون $h=2\ ,\ k=-3$

لكن :-

$$h=\frac{-a}{2} \Rightarrow 2=\frac{-a}{2} \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

$$k=\frac{-b}{2} \Rightarrow -3=\frac{-b}{2} \Rightarrow \boxed{b=6}$$

كذلك: -

$$r=\sqrt{h^2+k^2-\ c}$$

$$5=\sqrt{2^2+(-3)^2-\ c}$$

$$5=\sqrt{13-\ c}$$

وبتربيع الطرفين:

$$25=13-c$$

$$c=13-25$$

$$\boxed{c=\ -12}$$

مثال 14

جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي للمحور y وتمر بالنقطتين $P_1(2,-3),P_2(-6,5)$

الحل

بما ان مركز الدائرة ينتمي للمحور y لذلك يكون $C(h,k)=C(0,k)$ وكذلك

$$r=CP_1=\sqrt{(0-2)^2+(k+3)^2}$$

$$r=\ \sqrt{4+(k+3)^2}$$

$$r=CP_2=\sqrt{(0+6)^2+(k-5)^2}$$

تكملة

$$r = \sqrt{36 + (k - 5)^2}$$
$$\therefore \sqrt{4 + (k + 3)^2} = \sqrt{36 + (k - 5)^2}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على :-

$$4 + (k + 3)^2 = 36 + (k - 5)^2$$
$$4 + k^2 + 6k + 9 = 36 + k^2 - 10k + 25$$
$$13 + 6k = 61 - 10k$$
$$10k + 6k = 61 - 13$$
$$16k = 48$$
$$k = \frac{48}{16} = 3$$
$$\therefore C = (0, 3)$$
$$\therefore r = \sqrt{4 + (3 + 3)^2}$$
$$r = \sqrt{4 + 36}$$
$$r = \sqrt{40}$$
$$r = 2\sqrt{10}\ units$$

وبالتعويض في الصيغة القياسية

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

نحصل على معادلة الدائرة وكما يأتي :-

$$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2$$
$$x^2 + (y - 3)^2 = 40$$

مثال 15

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $P_1(0, 0), P_2(0, 4), P_3(1, 3)$

الحل

ان الصيغة العامة لمعادلة الدائرة التي تمر بنقطة الاصل وكما اوضحنا سابقاً هي :-

$$x^2 + y^2 + Ax + By = 0$$

النقطة $P_2(0, 4)$ تحقق هذه المعادلة أي :-

$$0 + 4^2 + A \times 0 + B \times 4 = 0$$
$$16 + 4B = 0 \Rightarrow B = -4$$

كذلك النقطة $P_3(1, 3)$ تحقق هذه المعادلة أيضاً اي: -

$$1^2 + 3^2 + A \times 1 + B \times 3 = 0$$
$$1 + 9 + A + 3B = 0$$
$$10 + A + 3 \times (-4) = 0$$
$$-2 + A = 0$$
$$A = 2$$

بالتعويض في الصيغة العامة اعلاه نحصل على معادلة الدائرة وهي :-

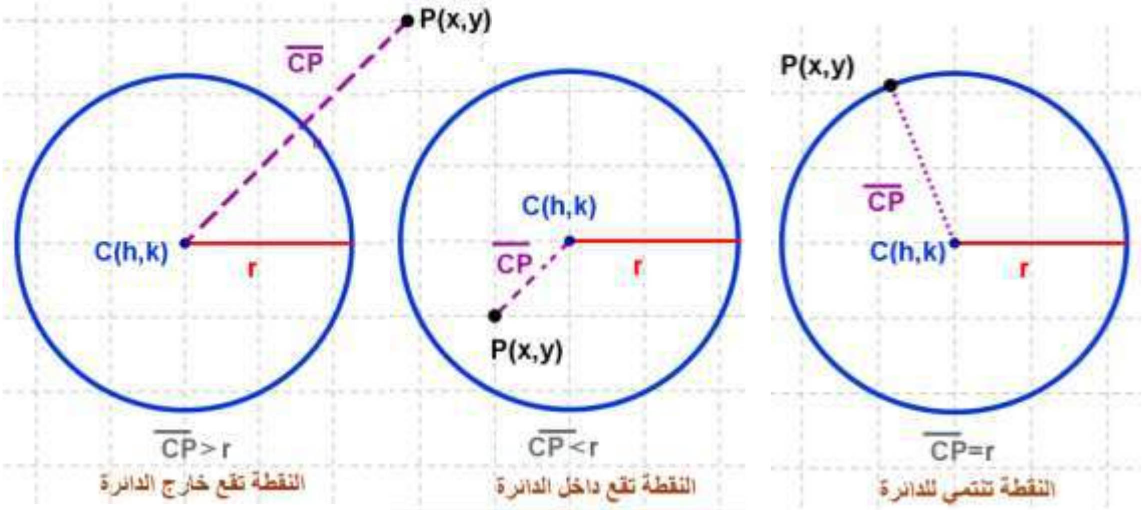
$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

8-5 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

لتكن لدينا الدائرة التي مركزها النقطة $C(h,k)$ وطول نصف قطرها يساوي $(r\ units)$ ولتكن $P(x,y)$ اي نقطة معلومة في المستوي.

ولكي نعين موقع النقطة $P(x,y)$ بالنسبة للدائرة فان هنالك ثلاثة احتمالات لا غيرها (لاحظ الشكل 5-19 وهي :-

1) النقطة تنتمي للدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{Cp} = r$.
2) النقطة تقع داخل الدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{Cp} < r$.
3) النقطة تقع خارج الدائرة وفي هذه الحالة يكون : $\overline{Cp} > r$.



الشكل 5-19 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

مثال 16

بين موقع النقطة $P(-2,-3)$ بالنسبة للدائرة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 - 8x - 3 = 0$$

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4 \quad , \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(h,k) \Rightarrow C(4,0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{16 + 0 - (-3)} = \sqrt{19}\ units$$

$$\overline{CP} = \sqrt{(4+2)^2 + (0+3)^2}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{36+9}$$

$$\overline{CP} = \sqrt{45}\ units$$

$$\because\ \overline{CP} > r$$

اذن النقطة تقع خارج الدائرة.

مثال 17

أثبت أن النقطة $P(1,-5)$ تقع داخل الدائرة التي معادلتها:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

الحل

بالمقارنة مع الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

نتوصل الى ان :-

$$h=2\ ,\qquad k=-3 \Rightarrow C(h,k) \Rightarrow C(2,-3)$$

$$r^2=25 \Rightarrow r=5\ units$$

$$\overline{CP}=\sqrt{(2-1)^2+(-3+5)^2}$$

$$\overline{CP}=\sqrt{1+4}$$

$$\overline{CP}=\sqrt{5}\quad units$$

$$\because CP<r$$

اذن النقطة تقع داخل الدائرة.

مثال 18

ما علاقة النقطة $P(1,3)$ بالدائرة التي معادلتها $x^2+y^2+2x-4y=0$ ؟

الحل

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-2}{2}=-1\quad ,\quad k=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2 \Rightarrow C(h,k) \Rightarrow C(-1,2)$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+4-0}=\sqrt{5}\ units$$

$$\overline{CP}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-3)^2}$$

$$\overline{CP}=\sqrt{4+1}$$

$$\overline{CP}=\sqrt{5}$$

$$\because CP=r\quad units$$

اذن النقطة تنتمي للدائرة.

5-9 علاقة نقطة معلومة بدائرة معلومة

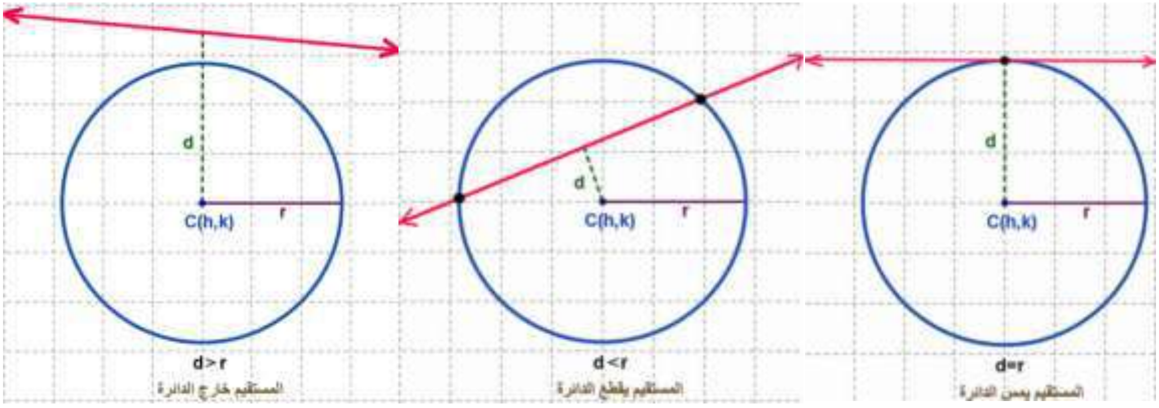
يكون المستقيم مماساً للدائرة (اي يشترك معها في نقطة) او قاطعاً لها (اي يشترك معها في نقطتين) او غير قاطع او مماس لها (اي لا يشترك معها في اي نقطة). (لاحظ الشكل 5-20)، ويمكن الاستدلال على ذلك كما يأتي :-

1) نستخرج مركز الدائرة وطول نصف قطرها كما تعلمنا في البند السابق.
2) نستخرج البعد العمودي بين مركز الدائرة والمستقيم المعلوم باستعمال القانون الذي سبق أن استعملناه في بعض الامثلة السابقة وهو :-

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3) نقارن البعد مع طول نصف القطر ويكون :-

- المستقيم مماسا للدائرة عندما يكون: $d = r$.
- المستقيم قاطعاً للدائرة عندما يكون: $d < r$.
- المستقيم غير قاطع او غير مماس للدائرة عندما يكون: $d > r$.



الشكل 5-20علاقة مستقيم معلوم بدائرة معلومة

ملاحظـة :-

يمكن تعيين نوع العلاقة بين مستقيم معلوم ودائرة معلومة بطريقة اخرى هي حل معادلتي المستقيم والدائرة جبرياً فإذا :-

- حصلنا على نقطتين حقيقيتين مختلفتين فان المستقيم يقطع الدائرة في هاتين النقطتين.
- حصلنا على نقطة واحدة فأن المستقيم يمس الدائرة في تلك النقطة.
- لم نحصل على اية نقاط فان المستقيم يقع خارج الدائرة.

مثال 19

ما علاقة المستقيم $x = y - 2$ بالدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ؟

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = 0 \quad , \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(h, k) \Rightarrow C(0, 0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2 \ units$$

نرتب معادلة المستقيم على الوجه الاتي :-

$$x - y + 2 = 0$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

أذن المستقيم يقطع الدائرة. $\because d < r$

تكملة

الحل بالطريقة الثانية :- نعوض معادلة المستقيم $x = y - 2$ في معادلة الدائرة وكما يأتي :-

$$(y-2)^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$y^2 - 4y + 4 + y^2 - 4 = 0$$
$$2y^2 - 4y = 0$$
$$y^2 - 2y = 0$$
$$y(y-2) = 0$$

أما: $y = 0 \Rightarrow x = 0 - 2 = -2 \Rightarrow (-2, 0)$

أو: $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2 - 2 = 0 \Rightarrow (0, 2)$

حصلنا على نقطتين مختلفتين لذلك فان المستقيم يقطع الدائرة في هاتين النقطتين.

مثال 20

بين ان المستقيم الذي معادلته $x - 2y + 11 = 0$ يمس الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ ، وجد نقطة التماس.

الحل

نستخدم الطريقة الثانية للحل في هذا السؤال لكون نقطة التماس مطلوبة ايضاً.

$$x - 2y + 11 = 0 \Rightarrow \quad x = 2y - 11$$
$$(2y - 11)^2 + y^2 + 2(2y - 11) - 19 = 0$$
$$4y^2 - 44y + 121 + y^2 + 4y - 22 - 19 = 0$$
$$5y^2 - 40y + 80 = 0 \qquad (\div 5)$$
$$y^2 - 8y + 16 = 0$$
$$(y-4)^2 = 0$$
$$y - 4 = 0$$
$$y = 4$$
$$x = 2 \times 4 - 11$$
$$x = 8 - 11 = -3$$

حصلنا على نقطة واحدة هي $(-3, 4)$ وهذا يعني ان المستقيم يمس الدائرة وان هذه النقطة هي نقطة التماس.

مثال 21

بين ان المستقيم الذي معادلته $4x + 3y - 12 = 0$ لا يقطع الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 2 = 0$ ولا يمسها.

الحل

$$h = \frac{-A}{2} = 0 \quad , \quad k = \frac{-B}{2} = 0 \Rightarrow C(h, k) \Rightarrow C(0, 0)$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{0 + 0 + 2} = \sqrt{2} \ units$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|4 \times 0 + 3 \times 0 - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}$$

$$\because d > r$$

أذن المستقيم يقع خارج الدائرة اي لا يقطعها ولا يمسها.

10-5 معادلة مماس الدائرة عند نقطة من نقاطها

لإيجاد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ عند النقطة (x_1,y_1) التي تنتمي اليها نستخدم المبرهنة التي درسناها في الصف الثالث المتوسط والتي تنص على : ((المماس عمود على نصف قطر الدائرة المرسوم من نقطة التماس)).

اما خطوات ايجاد معادلة المماس فهي كالآتي :-

1) نستخرج مركز الدائرة $C(h,k)$.

2) نجد ميل $(Slope)$ نصف القطر المار بنقطة التماس باستعمال القانون الذي درسناه في الصف الاول ضمن فصل الهندسة الاحداثية وهو:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ولذلك يكون ميل نصف القطر m_r :-

$$\boxed{m_r=\frac{y_1-k}{x_1-h}}$$

3) وبما ان المماس عمودي على نصف القطر اعتماداً على المبرهنة التي ذكرناها آنفاً فان ميل المماس m_t يساوي المقلوب السالب لميل نصف القطر أي :-

$$\boxed{m_t=\frac{-1}{m_r}}$$

4) نجد معادلة المماس بمعلومية ميله و نقطة التماس بالقانون الاتي :-

$$\boxed{y-y_1=m_t\,(x-x_1)}$$

مثال 22

جد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2-8x+10y+16=0$ عند النقطة $(1,-1)$.

الحل

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-8)}{2}=4\ ,\quad k=\frac{-B}{2}=\frac{-10}{2}=-5\Rightarrow C(h,k)$$

$$\Rightarrow C(4,-5)$$

$$m_r=\frac{y_1-k}{x_1-h}\ \Rightarrow m_r=\frac{-1-(-5)}{1-4}=\frac{-1+5}{1-4}=-\frac{4}{3}$$

$$m_t=\frac{-1}{m_r}=\frac{3}{4}\qquad y-y_1=m_t\,(x-x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{3}{4}(x-1)$$

$$4y+4=3x-3$$

$$4y+4-3x+3=0$$

$$-3x+4y+7=0$$

$$\boxed{3x-4y-7=0}$$ معادلة المماس للدائرة

ملاحظة :-

يمكننا استخدام القانون الاتي لإيجاد معادلة مماس الدائرة عند نقطة التماس بشكل مباشر :-

$$xx_1 + yy_1 - h(x + x_1) - k(y + y_1) + c = 0$$

حيث $C(h, k)$ المركز ، (x_1, y_1) نقطة التماس ، c الحد المطلق في معادلة الدائرة.

حل المثال السابق بهذه الطريقة :-

$$h = \frac{-A}{2} = \frac{-(-8)}{2} = 4 \quad , \quad k = \frac{-B}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \;\Rightarrow C(4, -5)$$

$$xx_1 + yy_1 - h(x + x_1) - k(y + y_1) + c = 0$$

$$x \times 1 + y \times (-1) - 4(x + 1) - (-5)(y - 1) + 16 = 0$$

$$x - y - 4x - 4 + 5y - 5 + 16 = 0$$

$$-3x + 4y + 7 = 0$$

معادلة المماس للدائرة $\boxed{3x - 4y - 7 = 0}$

تمارين (5-1)

1. استخرج معادلة الدائرة في كل من الحالات الاتية :-

a) طول نصف القطر $7\ units$ ومركزها النقطة $(2, -2)$.

b) مركزها نقطة الاصل وتمر بالنقطة $(-6, -1)$.

c) مركزها النقطة $(-3, 7)$ وتمر بنقطة الاصل.

d) مركزها النقطة $(1, 1)$ وتمر بالنقطة $(5, -2)$.

e) نهايتا أحد أقطارها النقطتان $(2, 1)$, $(-3, 5)$.

2. جد احداثيي المركز وطول نصف القطر للدوائر الاتية :-

a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3$

b) $(x - 4)^2 + y^2 = 9$

c) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0$

d) $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 49$

3. إذا كانت $mx^2+2y^2-4ax+4by+cxy+\ 6=0$ معادلة دائرة تمس المحورين معاً، جد قيم الثوابت $m.a,b,c\in\mathbb{R}$ ؟

4. إذا كانت $ax^2+2y^2+8x-12y+c=0$ معادلة دائرة تمس المحور y ، جد :-

a) قيم الثوابت $a,c\in\mathbb{R}$.

b) علاقة النقاط $(1,-2)$, $(5,5)$ بالدائرة

5. جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي الى المحور x وتمر بالنقطتين $(3,-1)$ ، $(1,5)$.

6. جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين معاً وطول نصف قطرها $5\ units$ للحالات الاتية :-

a) الدائرة تقع في الربع الاول.

b) الدائرة تقع في الربع الثالث.

7. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(2,-2)$ وتمس المستقيم $x-y=5$.

8. جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-5,-3)$ وتمس المستقيم $5x+12y-4=5$.

9. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: $P_1(0,0),P_2(2,-1)\ ,P_3(4,-3)$.

10. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: $P_1(0,2),P_2(3,3)\ ,P_3(7,1)$.

11. بين ان النقطة $\mathrm{P}(1,2)$ تنتمي للدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-2x-3y+3=0$ ثم جد معادلة المماس للدائرة عند تلك النقطة .

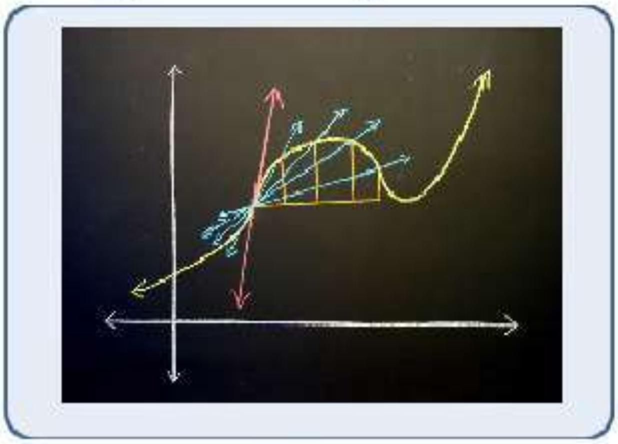
12. جد معادلة الدائرة التي تمس المحور x عند النقطة $(4,0)$ومركزها ينتمي الى المستقيم الذي معادلته $x+2y+2=0$.

13. لتكن $x^2+y^2=25$ معادلة دائرة، بين موقع النقاط الاتية بالنسبة للدائرة: $P_1(3,4),P_2(2,-2)\ ,P_3(-4,4)$.

14. جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(-3,6)$ وتمس المحورين معاً .

15. جد معادلة الدائرة التي تمس المحور x وتمس المستقيم $y=4$ ويقع مركزها على المحور y .

الفصل السادس



حساب التفاضل

الفصل السادس
حساب التفاضل
(Calculus- Differentiation)

البنود
(SECTIONS)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
epsilon	ϵ	عدد متناهي في الصغر
Neighborhood left	$(a-\epsilon\,,a)$	جوار العدد a من اليسار
Right Neighborhood	$(a\,,a+\epsilon)$	جوار العدد a من اليمين
Neighborhood	$(a-\epsilon\,,a+\epsilon)$	جوار العدد a
x approaches to a from the left	$x\to a^-$	قيمة x تقترب من a من اليسار
x approaches to a from the right	$x\to a^+$	قيمة x تقترب من a من اليمين
x approaches to a	$x\to a$	قيمة x تقترب من a
The limit of the function $f(x)$ When x approches to a	$\lim_{x\to a} f(x)$	غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب قيمة x من a

Delta x	Δx	مقدار التغير في x
Delta y	Δy	مقدار التغير في y
Delta y Delta x over	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	مقدار التغير بالدالة
The first derivative of the function	$f'(x), y', \frac{dy}{dx}$	المشتقة الأولى للدالة $f(x)$
The 2.nd derivative of the function	$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}$	المشتقة الثانية للدالة $f(x)$
Slope of the tangent of the function	$m = f'(a)$	ميل المماس للمنحني $f(x)$ عند النقطة a
distance	S	الموقع ، البعد ، الازاحة
Time	t	الزمن
Velocity	$V = \frac{dS}{dt}$	السرعة
The first derivative of the function	$A = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$	التعجيل

سوف نتعلم في هذا الفصل :-

- مفهوم الجوار تمهيداً لمفهوم غاية الدالة عند نقطة.
- كيفية ايجاد قيمة الغاية للدوال الجبرية.
- مفهوم الاستمرارية للدالة عند أحد نقاطها.
- تحديد فيما إذا كانت الدالة مستمرة عند نقطة من نقاطها ام لا.
- مفهوم مشتقة الدالة وكيفية ايجادها باستخدام التعريف.
- كيفية ايجاد معادلة المماس للمنحني عند نقطة معينة.
- التطبيق الفيزيائي للمشتقة.
- القواعد الاساسية لإيجاد المشتقة.
- المشتقات من الرتب العليا.

الفصل السادس

حساب التفاضل

(Calculus- Differentiation)

1-6 الغاية (Limit)

ان مفهوم الغايه هو من المفاهيم المهمة في الرياضيات وهي الاساس لمفاهيم أخرى مثل استمرارية الدالة وفي حساب التفاضل والتكامل.

1-1-6 الجوار (Neighborhood)

لتوضيح مفهوم الجوار نعطي هذه المفاهيم البسيطة وصولاً الى مفهوم الجوار. سبق ان تعلمنا مفهوم الفترات المفتوحة في الاعداد الحقيقية وكيفية توضيحها على خط الاعداد، فمثلاً الفترة المفتوحة $(1,3)$ تمثل بقطعة المستقيم $\overline{AB}$ على خط الاعداد كما في الشكل 1-6 المجاور.

الشكل 1-6

نلاحظ ان العدد 2 ينتمي للفترة المفتوحة $(1,3)$ وتوجد قيم في الفترة أكبر من العدد 2 وتكبر اقتراباً للعدد 3 وكذلك توجد قيم أصغر من العدد 2 وتصغر اقتراباً للعدد 1.

تعريف

أذا كان a عدداً حقيقياً وكان $\epsilon > 0$ (هذا الرمز لاتيني ويقرأ أبسيلون) فأن الفترة -:

1) $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ هي جوار للعدد a (a تنتمي للفترة) .
2) $(a-\epsilon, a)$ هي جوار العدد a من اليسار (a لا تنتمي للفترة) .
3) $(a, a+\epsilon)$ هي جوار للعدد a من اليمين(a لا تنتمي للفترة) .

لذلك يوجد عدد غير منتهٍ من الجوارات للعدد a حسب قيم ϵ .

مثال 1

أذا كانت $a = 2$ ، $\epsilon = \frac{1}{2}$، أكتب جواراً للعدد a ثم أكتب جوار اليسار وجوار اليمين.

الحل

ان جوار العدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $\left(2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}\right)$ اي $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

اما جوار اليسار للعدد $a = 2$ فهو الفترة المفتوحة $\left(2-\frac{1}{2}, 2\right)$ اي $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

وكذلك جوار اليمين للعدد $a = 2$ هو الفترة المفتوحة $\left(2, 2+\frac{1}{2}\right)$ اي $\left(2, \frac{5}{2}\right)$.

مثال 2

أذا كانت $a = 1$ ، اكتب ثلاث جوارات للعدد a .

الحل

1) نختار $\epsilon = \frac{1}{2}$ فيكون جوار العدد $a = 1$ هو الفترة المفتوحة $\left(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right)$ اي $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) نختار $\epsilon = \frac{3}{4}$ فيكون جوار العدد $a = 1$ هو الفترة المفتوحة $\left(1-\frac{3}{4}, 1+\frac{3}{4}\right)$ اي $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

3) نختار $\epsilon = \frac{2}{3}$ فيكون جوار العدد $a = 1$ هو الفترة المفتوحة $\left(1-\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{3}\right)$ اي $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

2-1-6 غاية الدالة (Limit Of a Function)

هنالك بعض المفاهيم التي يجب توضيحها قبل الدخول في تعريف غاية الدالة ومنها ما يأتي :-

1) $(x \to a)$ (تقرأ x تقترب من a) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقية القريبة جدا من العدد a ، يميناً ويساراً ويمكن ان نقول ان قيم x هي الاعداد التي تنتمي الى جوارات العدد a والقريبة منه . مثلاً $(x \to 2)$ تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقية القريبة جداً جداً من العدد 2 سواء أكانت عن يمينه أو عن يساره ومنها :-

من اليسار: $\ldots, 1.9999, 1.999, 1.99, 1.9$

وكذلك الاعداد: -

من اليمين: $\ldots, 2.0001, 2.001, 2.01, 2.1$

2) $(x \to a^+)$(تقرأ x تقترب من a من جهة اليمين) تعني ان قيم xهي الاعداد الحقيقية القريبة جداً جداً من العدد a وتقع في جهة اليمين اي اكبر من العدد a، فمثـــــلاً $(x \to -1^+)$ تعني ان قيم X هي الاعداد الحقيقية القريبة جداً جداً من العدد -1 من جهة اليمين اي اكبر من العدد (-1) ومنها :-

$\ldots, -0.9999, -0.999, -0.99, -0.9$

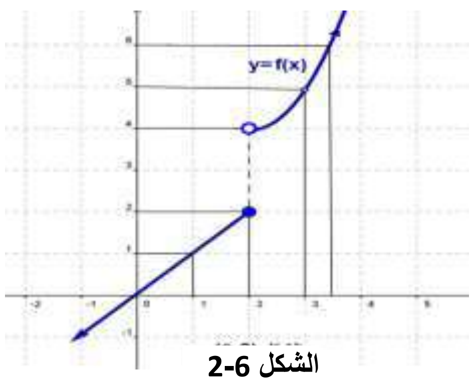
3) $(x \to a^-)$ (تقرأ x تقترب من a من جهة اليسار) تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقية القريبة جداً جداًمن العدد a وتقع في جهة اليسار اي اصغر من العدد a ، مثلاً $(x \to 0^-)$ تعني ان قيم x هي الاعداد الحقيقية القريبة جداً جداً من العدد 0 من جهة اليسار اي اصغر من العدد (0) ومنها :-

$\ldots, -0.0001, -0.001, -0.01, -0.1$

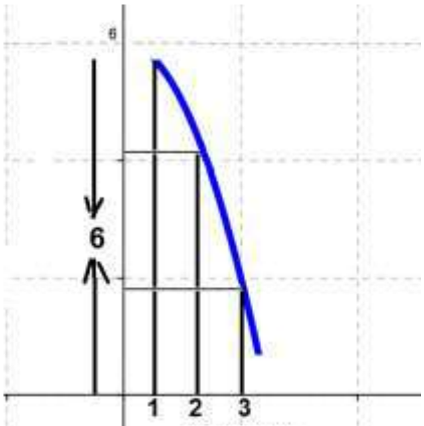
➢ غاية الدالة عند نقطة :-

سوف نقوم بتوضيح مفهوم غاية الدالة عند نقطة باستعمال التمثيل البياني للدالة موضحاً بالشكل 2-6 الاتي حيث نلاحظ هندسياً ان الدالة $y = f(x)$ منفصلة عند $x = 2$ ، وعندما x تقترب من العدد 2 من جهة اليسار وتكتب $(x \to 2^-)$ فان قيم الدالة $y = f(x)$ تقترب من 2 أيضاً وتقول عندئذ ان $f(x) \to 2$ عندما $x \to 2^-$ ونكتب بالرموز :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$



الشكل 2-6



الشكل (3-6)

اما عندما تقترب x من العدد 2 من جهة اليمين وتكتب $(x \to 2^+)$ فان الدالة $y = f(x)$ تقترب من العدد 4 ونقول عندئذ ان $f(x) \to 4$ عندما $x \to 2^+$ ونكتب بالرموز

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

الان لاحظ الشكل (3-6) المجاور:

عندما $(x \to 3)$ يميناً او يساراً فان الدالة $y = f(x)$ تقترب من العدد 6 ويقال ان

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

اي ان العدد 6 هو غاية الدالة $y = f(x)$ بمعنى ان القيمة التي تقترب منها الدالة $y = f(x)$ عندما تقترب x من العدد 3 سواء كان هذا الاقتراب من اليمين او من اليسار اي

$$[(x \to 3^-) \text{ او } (x \to 3^+)]$$

لاحظ في المثالين السابقين اننا لم نذكر ان كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة ام غير معرفة عند $x = 2$ وذلك لان الغاية تعنى بقيم الدالة عندما تقترب x من العدد المعين اي عندما تكون الدالة معرفة في جوار العدد المعيَن .

والان سنقوم بعرض فكرة الغاية بطريقة ثانية :-

مثال 3

لتكن الدالة $f(x) = x + 3$ والمطلوب ان نبحث عن غاية الدالة عندما $x \to 2$ وكما أوضحنا سابقاً فأن قيم x قريبة جداً جداً من العدد 2 يميناً ويساراً. وعند تعويض هذه القيم في الدالة $f(x) = x + 3$ فإننا نحصل على قيم الدالة $f(x)$ كما في الجدول الاتي:

$x \to 2^+$ (من اليمين) $x \to 2^-$ (من اليسار)

نلاحظ إنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار أي $[(x \to 2^+) \text{ او } (x \to 2^-)]$ فإن:

x	.....	1.9	1.99	0.999		2	....	2.001	2.01	2.1	....
$f(x)$	.....	4.9	4.99	4.999		5	....	5.001	5.01	5.1	....

$f(x) = x + 3$ تقترب من العدد 5 وبالتالي فان العدد 5 هو غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد2 وبالرموز نكتب :- $f(x) \to 5$ عندما $x \to 2$ أو

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

ومما سبق يمكن ان نلخص مفهوم الغاية للدالة $f(x)$ كما يأتي :-

ليكن a و L عددين حقيقيين. نقول أن L هو غاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a اذا تحقق الشرطان الاتيان :-

$$1) \ \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

$$2)\ \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

ومن ثم نكتب بالرموز:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

أي أن $f(x) \to 2$ عندما $x \to a$ ((تقرأ $f(x)$ تقترب من L عندما x تقترب من a)) .

➢ ملاحظات حول إيجاد الغايات

1. نحدد مجال الدالة $f(x)$.
2. لإيجاد غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ ليس من الضروري ان تكون a تنتمي لمجال الدالة. اي ليس من الضروري ان تكون $f(a)$ معرفة ولكن المهم ان تكون الدالة معرفة جوار العدد a من اليمين ومن اليسار.
3. أذا كانت

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \ ، \ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$$

موجودتين فانه:

a) يقال ان للدالة $f(x)$ غاية عندما $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $L_1 = L_2$

b) يقال ان الغاية غير موجودة للدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ $\Leftrightarrow$ $L_1 \neq L_2$

➢ مبرهنات الغايات

1. غاية الدالة $f(x)$ ان وجدت فهي وحيدة. بتعبير اخر: إذا كان

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1 \ ، \ \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$$

فأن:

$$L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{موجودة}$$

2. اذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت فان :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

مثال 4

$$1)\ \lim_{x\to 1} \sqrt{2} = \sqrt{2} \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} 3 = 3$$

3. اذا كانت $f(x) = x$ فأن:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

مثال 5

$$1)\ \lim_{x\to -2} x = -2 \qquad 2)\ \lim_{x\to \sqrt{3}} x = \sqrt{3}$$

4. إذا كانت:

$$\lim_{x\to a} f(x) \ ، \ \lim_{x\to a} g(x)$$

موجودتين فأن:

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال 6

1) $\lim\limits_{x\to1} (x+4) = \lim\limits_{x\to1} x + \lim\limits_{x\to1} 4 = 1+4=5$

2) $\lim\limits_{x\to-5} (x-3) = \lim\limits_{x\to-5} x - \lim\limits_{x\to-5} 3 = -5-3=-8$

5. إذا كانت $f(x)=x$ موجودة وكانت c عدداً ثابتاً فان:

$$\lim_{x\to a} c.f(x) = c.\lim_{x\to a} f(x)$$

مثال 7

1) $\lim\limits_{x\to2} 4x = 4\times\lim\limits_{x\to2} x = 4\times2=8$

2) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-1}{x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to3} x^2 - \lim\limits_{x\to3} 1}{\lim\limits_{x\to3} x + \lim\limits_{x\to3} 2} = \dfrac{3^2-1}{3+2} = \dfrac{8}{5}$

مثال 8

$$\lim_{x\to-3} (x^2+2x) = \lim_{x\to-3} x^2 + 2\lim_{x\to-3} x$$
$$= (-3)^2 + 2\times(-3)$$
$$= 9-6=3$$

مثال 9

لتكن: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x\geq1 \\ 2x & , x<1 \end{cases}$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x\to1$ ؟

الحل

عندما $x\to1^+$ (من اليمين) فأن $f(x)=x^2+1$

$\lim\limits_{x\to1^+} (x^2+1) = 1^2+1=2=L_1$

عندما $x\to1^-$ (من اليسار) فأن $f(x)=2x$

$\lim\limits_{x\to1^-} 2x = 2\times1=2=L_2$

$\because L_1=L_2=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$

اي ان الغاية موجودة عند $x\to1$ وقيمتها تساوي 2.

مثال 10

لتكن: $f(x) = \begin{cases} 1-x & , x\leq2 \\ x+1 & , x>2 \end{cases}$

هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x\to2$ ؟

الحل

عندما $x \to 2^+$ (من اليمين) فأن $\quad f(x) = x + 1$

$$\lim_{x\to 2^+}(x+1) = 2+1 = 3 = L_1$$

عندما $x \to 2^-$ (من اليسار) فأن $\quad f(x) = 1 - x$

$$\lim_{x\to 2^-}(1-x) = 1-2 = -1 = L_2$$

$$\because L_1 \neq L_2$$

اذن الغاية غير موجودة عندما $x \to 2$

اي ان: $\quad f(x) \quad \lim_{x\to 2}$ غير موجودة

مثال 11

لتكن: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & , x \le 1 \\ 2x+a & , x > 1 \end{cases}$

وكانت $\quad f(x) \quad \lim_{x\to 1}$ موجودة فاحسب قيمة a .

الحل

بما ان $\quad f(x) \quad \lim_{x\to 1}$ موجودة, فان الغاية من اليسار $L_1 = L_2$ الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 1^+}(2x+a) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+2)$$

$$2\times 1 + a = 1^2 + 2$$

$$2 + a = 3$$

$$a = 3 - 2$$

$$a = 1$$

مثال 12

لتكن: $f(x) = \begin{cases} x^2+a & , x > 1 \\ b-2x & , x \le 1 \end{cases}$

وكانت $\quad f(x) \quad \lim_{x\to 1}$ موجودة $\quad f(x) = 5 \quad \lim_{x\to 1^-}$, فجد قيم كلاً من a, b .

الحل

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$$

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}(b-2x) = 5$$

$$b - 2\times 1 = 5$$

$$b = 5 + 2 = 7$$

$\because \lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة

الغاية من اليسار $L_1 = L_2$ الغاية من اليمين

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

تكملة

$$\lim_{x\to1^+}(x^2+a)=5$$

$$1^2+a=5$$

$$a=5-1=4$$

مثال 13

جد قيمة a إذا علمت ان :-

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-1}{x+2}=2a+3$$

الحل

$$\frac{1^2+3\times1-1}{1+2}=2a+3$$

$$\frac{1+3-1}{3}=2a+3$$

$$\frac{3}{3}=2a+3$$

$$1=2a+3$$

$$2a=1-3$$

$$2a=-2$$

$$a=-1$$

ملاحظة :- ان العمليات الرياضية الاتية تعتبر تعابيرا ليست ذات معنى في علم الرياضيات :-

$$\frac{0}{0}\ ,\frac{\infty}{\infty}\ ,0.\infty\ ,\infty\times\infty\ ,1^{\infty}\ ,0^0$$

مثال 14

جد قيمة :-

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

الحل

عند $x=2$ يكون

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}\ [\text{تعبير ليس ذو معنى}]$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4$$

مثال 15

جد قيمة :-

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$$

الحل

عند $x=\sqrt{2}$ يكون

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{2-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$$ [تعبير ليس ذو معنى]

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x^2-2)(x+\sqrt{2})}{x^2-2}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{2}} (x+\sqrt{2})$$

$$= \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

مثال 16

جد قيمة :-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$$

الحل

عند $x=0$ يكون

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{0+1}-1}{0} = \frac{0}{0}$$ [تعبير ليس ذو معنى]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{0+1}+1)} = \frac{1}{(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{2}$$

تمارين (6-1)

1. جد قيم الغايات الاتية :-

$a)\ \lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x^2+3)$

$b)\ \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x-6}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2+2x-15}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

$f)\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

2. جد قيمة a إذا كانت :-

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x+6}{x+3}=3a-4$$

3. جد قيمة a إذا كانت :-

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=8$$

4. جد قيمة $a\,,\ b$ إذا كانت :-

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5 \text{ ، } \lim_{x\to -2} f(x)=-8 \text{ ، } f(x)=ax^2+bx$$

5. إذا كانت :-

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3, & x>2 \\ 5-2x, & x\le 2\end{cases}$$

a) هل للدالة $f(x)$ غاية عندما $x\to 2$ b) جد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

6. إذا كانت :-

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 2 \\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

هل $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ موجودة (معرفة)

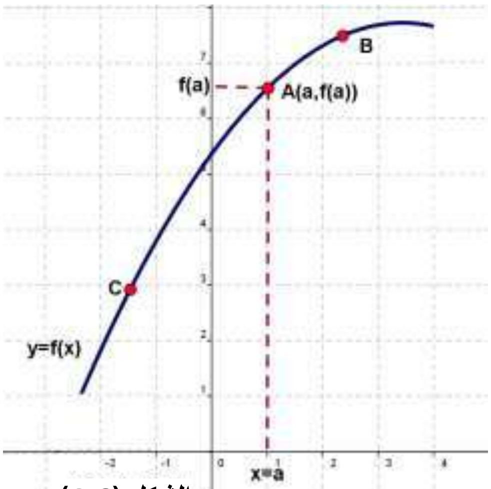
7. اذا كانت :-

$$f(x)=\begin{cases} a+2x & ,\ x\le -1 \\ 3-x^2 & ,\ x>-1\end{cases}$$

وكانت: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ موجودة ، جد قيمة a.

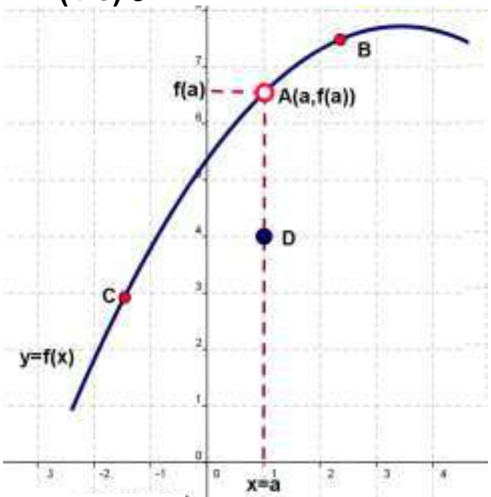
2-6 الاستمرارية (Continuity)

يمكن ان نوضح فكرة استمرارية الدالة عند نقطة معينة باستعمال الاشكال البيانية للدوال الاتية عند النقط المبينة في كل شكل منها.



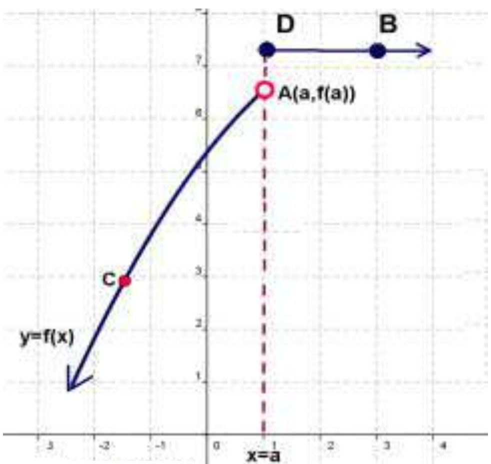
الشكل (6-4)

- في الشكل (6-4) المجاور نلاحظ انه عندما نضع القلم في اقصى اليسار عند النقطة C ونحرك القلم على المنحني $y = f(x)$ باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا لا نرفع القلم، اي ان الحركة تكون مستمرة بدون انقطاع.



الشكل (6-5)

في الشكل (6-5) المجاور نلاحظ انه عندما نضع القلم في اقصى اليسار عند النقطة C ونحرك القلم على المنحني $y = f(x)$ باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا نجد فجوة عند النقطة $x = a$ ، ولذلك فإننا نضطر لرفع القلم وتخطي الفجوة (عبورها). اي ان المنحني غير مستمر لأنه ينقطع عند النقطة $(x = a)$ فضلاً عن وجود النقطة المنفردة D والتي (هي احدى نقاط الدالة والتي نحتاج للمرور عليها ان نتحرك صوبها تاركين المنحني.



الشكل (6-6)

وكذلك الشكل (6-6) ادناه عندما نبدأ من النقطة C ونحرك القلم على المنحني $y = f(x)$ باتجاه النقطة B مروراً بالنقطة $A(a, f(a))$ فإننا نجد فجوة عند النقطة $x = a$ ، ولذلك فإننا نضطر لرفع القلم وتخطي الفجوة (عبورها) للتوجه نحو النقطة D اي ان المنحني غير مستمر (لانه ينقطع عند النقطة $x = a$).

مما سبق نلاحظ ان المنحني في الشكل (6-4) يكون مستمراً عند النقطة $x = a$ ويقال ان الدالة $y = f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = a$ بينما في الشكلين الاخرين يقال ان الدالة غير مستمرة عند النقطة $x = a$.

6-2-1 استمرارية الدالة عند نقطة

بناء على ما تم التوصل اليه فيما سبق نستطيع ان نعرّف مفهوم الاستمرارية عند نقطة معيّنة كالاتي:

تعريف

اذا كانت $f(x)$ دالة وكان $a \in \mathbb{R}$ وتحقق ما يأتي :-

$1)\ f(a)$ معرفة

$2)\ \lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة

$3)\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

فيقال عندئذ ان الدالة $f(x)$ مستمرة عند النقطة $x = a$.

أما أذا لم يتحقق على الاقل شرط واحد من الشروط الثلاثة اعلاه فيقال عندئذ ان الدالة $f(x)$ ليست مستمرة عند النقطة $x = a$.

مثال 17

اذا كانت $f(x) = x^2 + 3$. هل ان $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$ ؟

الحل

$f(x)$ كثيرة الحدود وان أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$.

$1)\ f(1) = 1^2 + 3 = 4$ معرفة

$2)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$ (اي أن الغاية موجودة)

$3)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 4$

أذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$.

مثال 18

أبحث استمرارية الدالة الاتية عند $x = 3$.

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

الحل

$1)\ f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ معرفة

$2)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \frac{3}{4}$ (اي أن الغاية موجودة)

$3)\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{3}{4}$

أذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 3$.

مثال 19

ابحث استمرارية الدالة الاتية عند $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , \quad x \geq 2 \\ -7 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

الحل

1) $f(2) = 2^2 + 4 = 8$ معرفة

2) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 4) = 2^2 + 4 = 8 = L_1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-7) = -7 = L_2$

$\because L_1 \neq L_2$ (اي أن الغاية غير موجودة)

أذن الدالة $f(x)$ ليست مستمرة عند $x = 2$.

مثال 20

ابحث استمرارية الدالة الاتية عند $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & , \quad x \neq 2 \\ 12 & , \quad x = 2 \end{cases}$$

الحل

1) $f(2) = 12$ معرفة

2) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4)$

$= 2^2 + 2 \times 2 + 4$

$= 4 + 4 + 4 = 12$ (اي أن الغاية موجودة)

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 12$

أذن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$.

تمارين (6-2)

1. لتكن $f(x) = x^2 + x + 1$ ابحث استمرارية الدالة عند $x = 3$.

2. لتكن :-

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

ابحث استمرارية الدالة في مجالها.

3. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \quad x \geq 1 \\ 3x + 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$.

4. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , \quad x \leq 2 \\ 1 - x^2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

اثبت ان $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$.

5. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & , \quad x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة $a \in \mathbb{R}$ اذا كانت $f(x)$ مستمرة عند $x = 1$.

6. لتكن :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , \quad x \neq 1 \\ 4 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x = 1$ ؟

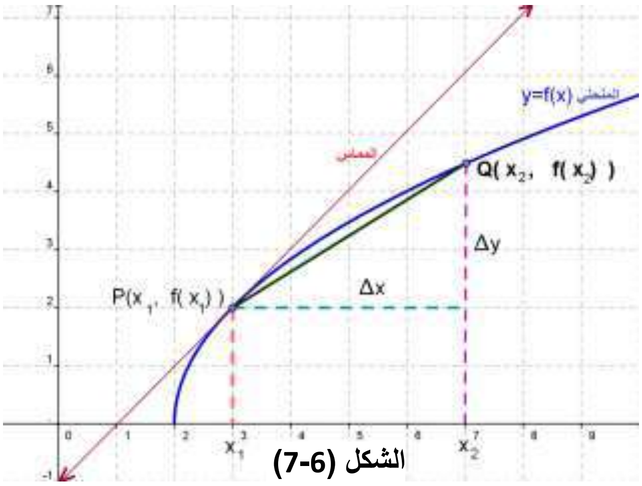
6-3 المشتقات (The Derivatives)

بعد ان اتممنا شرح الغاية والاستمرارية أصبحنا الان مستعدون للدخول في موضوع حساب التفاضل، ولنبدأ بمصطلح المشتقة.

نظراً لتطابق مفهوم المشتقة لدالة ما مثل $f(x)$ عند نقطة معيّنة مع مفهوم ميل المستقيم المماس لمنحني تلك الدالة عند تلك النقطة، لذلك نجد من الضروري أن نبدأ هذا الفصل بموضوع مماس المنحني عند نقطة معيّنة.

6-3-1 ميل المماس للمنحني عند نقطة معيّنة

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $I \subseteq \mathbb{R}$ وليكن x_1, x_2 عددين في I ، عندئذ يكون بيان الدالة $f(x)$ مستمراً عند النقطتين $P(x_1, f(x_1))$ ، $Q(x_2, f(x_2))$. نرسم القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ كما في الشكل (6-7) الاتي :



الشكل (6-7)

لنرمز $\Delta x = x_2 - x_1$ فيكون $x_2 = x_1 + \Delta x$ وبالتالي $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x)$ ومن معلوماتنا السابقة عن ميل المستقيم فان ميل القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ يكون مساوياً الى:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2$$

$$\therefore m = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad \Delta x \neq 0$$

والان نعتبر النقطة P ثابتة ونحرك النقطة Q على المنحني باتجاه النقطة P . كلما اقتربت Q من P اقتربت Δx من الصفر وعندها تصبح القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ أقرب الى المماس لمنحني الدالة عند النقطة P . وهذا يعني ان ميل المماس m للمنحني $y = f(x)$ عند نقطة التماس P هو الغاية لميل القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$ عندما تقترب Δx من الصفر $(\Delta x \to 0)$.

من هنا نستطيع ان نعرف ميل المماس m للدالة $y = f(x)$ عند النقطة P كالاتي :-

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \neq 0$$

مثال 21

جد ميل المماس للمنحني $f(x) = x^2 - 1$ عند $x = 2$.

الحل

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

تكملة

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+\Delta x)^2 - 1] - (2^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 1] - (4 - 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x)$$

$$= 4 + 0 = 4$$

(4-6) مشتقة الدالة

لدينا الدالة $y = f(x)$، لاحظنا في البند السابق (6-3) ان تغييراً صغيراً في قيمة x مقداره Δx ادى الى تغيير صغير في قيمة الدالة $y = f(x)$ مقداره Δy حيث : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

وبقسمة Δy على Δx نحصل على:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad \Delta x \neq 0$$

حيث يمثل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ معدل تغير الدالة.

عندما نحسب الغاية لمعدل تغير الدالة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تقترب Δx من الصفر فأننا بذلك نحصل على معدل التغير الآني أو اللحظي للدالة ونرمز له بالرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ ونطلق عليه تسمـــــــية (مشتقة الدالة) عند تلك النقطة، ونعبر عن ذلك بالرموز كالاتي :-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

أي ان المشتقة للدالة عند نقطة معينة x هو معدل التغير الاني او اللحظي للدالة عند تلك النقطة.

ومن هنا وكما ورد في البند (6-3-1) نلاحظ ان قيمة مشتقة الدالة عند نقطة معينة تمثل ميل المستقيم المماس لمنحني تلك الدالة عند تلك النقطة.

مثال 22

جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 - 5x$ باستعمال التعريف ثم أحسب $f'(0), f'(3)$

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \qquad \Delta x \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\,(x+\Delta x)^2 - 5(x+\Delta x)] - (x^2 - 5x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x - x^2 + 5x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x - 5)$$

$$= 2x - 5$$

أذن:

$$f'(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$$

$$f'(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$$

مثال 23

جد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ باستعمال التعريف .

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \qquad \Delta x \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x}$$

تكملة

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{-1}{x(x+0)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

6-4-1 معادلة المماس لمنحنى الدالة عند نقطة معينة

اذا كانت $y = f(x)$ دالة، (x_1, y_1) نقطة على منحني تلك الدالة فان معادلة المستقيم المماس لمنحني الدالة عند النقطة (x_1, y_1) تكون : $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$

مثال 24

اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ، جد باستخدام التعريف $f'(2)$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند $x = 2$.

الحل

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad , \quad \Delta x \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 1 - \ (2x^2 + 3x + 1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] + 3x + 3\Delta x + 1 - \ 2\,x^2 - 3x - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x - 2x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x + 3)$$

$$= 4x + 2 \times 0 + 3$$

$$f'(x) = 4x + 3$$

$\therefore \quad m = f'(2) = 4 \times 2 + 3 = 11$ ميل المماس للمنحني

تكملة

كذلك:

$$y = f(2) = 2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 15$$

$\therefore$ نقطة التماس $(2, 15)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 15 = 11(x - 2)$$
$$y - 15 = 11\,x - 22$$

$11x - y - 7 = 0$ معادلة المماس

5-6 التطبيق الفيزيائي للمشتقة

ان الازاحة والزمن مقداران فيزيائيان نستطيع قياسهما فلو فرضنا ان جسماً ما في الزمن t كان في الموقع $S = f(t)$ وفي زمن $(t + \Delta t)$ كان في الموقع $S + \Delta S = f(t + \Delta t)$.

اذن :
$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$$

حيث تمثل ΔS التغير في الازاحة S عندما يكون التغير في الزمن (t) يساوي Δt .

وبما ان معدل السرعة هو الفرق بين الازاحتين مقسوما على الفرق بين الزمنين فانه يمكننا ان نقول ان معدل السرعة هو $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ونعبر عن ذلك بالرموز كالاتي: -

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad , \quad \Delta t \neq 0$$

وعندما تصغر Δt وتقترب من الصفر فان معدل السرعة يصبح السرعة الانية للجسم في تلك اللحظة ونرمز لها بالرمز V حيث: -

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad , \quad \Delta t \neq 0$$

اي ان السرعة الانية V هي مشتقة الازاحة $S = f(t)$ وبالرموز: -

$$\boxed{V = \frac{ds}{dt} = f'(t)}$$

وبما ان التعجيل يمثل معدل السرعة بالنسبة للزمن فان مشتقة السرعة الانية تعطي تعجيل الجسم (A) اي ان: -

$$\boxed{A = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \quad , \quad \Delta t \neq 0}$$

مثال 25

لتكن الدالة $S = f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالأمتار. جد موقع الجسم وسرعته بعد $2\ sec$ من بدء الحركة.

الحل

$$\because S = f(t) = 2t^2 + 3$$

$$\therefore S = f(2) = 2 \times 2^2 + 3 = 11\ m$$

اي ان موقع الجسم يكون على بُعد $11\ m$ بَعد $2\ sec$ من بدء الحركة .

$$V = f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad , \qquad \Delta t \neq 0$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t+\Delta t)^2 + 3 - (2t^2 + 3)}{\Delta t}$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2) + 3 - 2t^2 - 3}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2 - 2t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(4t + 2\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (4t + 2\Delta t)$$

$$= \quad 4t + 2 \times 0 \quad = 4t$$

اذن سرعة الجسم بعد $2\ sec$ من بدء الحركة هي:

$$V = 4 \times 2 = 8 \frac{m}{sec}$$

مثال 26

لتكن الدالة $V(t) = 3t^2$ تمثل سرعة جسم متحرك مقاسة بالأمتار على الثانية جد التعجيل A بعد $2\ sec$ من بدء الحركة.

الحل

$$A = \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} \quad , \qquad \Delta t \neq 0$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t+\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3t^2}{\Delta t}$$

تكملة

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6t + 3\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(6t + 3\Delta t)$$

$$= 6t + 3 \times 0 = 6t$$

اذن تعجيل الجسم بعد $2\ sec$ من بدء الحركة هو:

$$A = 6 \times 2 = 12\ m/sec^2$$

(6-6) قواعد ايجاد المشتقة

في هذا البند سنقدم بعض القواعد التي تسهل علينا استخراج مشتقة الدالة عند نقطة في مجالها بدون استخدام التعريف، وبرهنة هذه القواعد ممكن باستخدام التعريف إلا إننا سوف نقبل بها بدون برهان وهي :-

1) مشتقة الدالة الثابتة $y = f(x) = C$ حيث C عدد حقيقي ثابت هي:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$$

مثال 27

إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$

وإذا كانت $f(x) = -5$ فإن $f'(x) = 0$

وإذا كانت $y = \frac{1}{2}$ فإن $y' = 0$

وإذا كانت $h(x) = \sqrt{3}$ فإن $h'(x) = 0$

2) مشتقة الدالة $y = f(x) = x^n$ تساوي $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

حيث $n \in \mathbb{R}$

مثال 28

إذا كانت $y = x^3$ فإن $y' = 3x^2$

وإذا كانت $f(x) = x^5$ فإن $f'(x) = 5x^4$

وإذا كانت $y = x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1\,x^{1-1} = x^0 = 1$

وإذا كانت $g(x) = x^{-4}$ فإن $g'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

3) مشتقة الدالة $y = f(x) = a.x^n$ تساوي $y' = f'(x) = a.nx^{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{R}$

مثال 29

إذا كانت $y = 3x^5$ فإن $y' = 15x^4$

وإذا كانت $y = 5.\sqrt[3]{x^2}$ فإن المشتقة تستخرج كما يلي :-

$$y = 5 \times x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = 5 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{10}{3.x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{3.\sqrt[3]{x}}$$

4) مشتقة مجموع او طرح عدد من الدوال كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي حاصل جمع او طرح مشتقاتها في تلك النقطة

مثال 30

إذا كانت $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$

فإن $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} - 0$

$y' = -12x^{-4} - 10x + 7$

5) مشتقة حاصل ضرب دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي:
الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

مثال 31

إذا كانت $f(x) = (3x-2)(4x+1)$

فإن $f'(x) = (3x-2) \times 4 + (4x+1) \times 3$

$= 12x - 8 + 12x + 3$

$= 24x - 5$

6) مشتقة حاصل قسمة دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي

$$\frac{\text{المقام × مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

مثال 32

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2} \quad , \quad x \neq \frac{-2}{3}$

فإن $$f'(x) = \frac{(3x+2) \times 2 - (2x+1) \times 3}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{6x + 4 - 6x - 3}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

7) مشتقة الدالة بالصورة $f(x) = [g(x)]^n$ تساوي

$$f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

أي ان الدالة المرفوعة لأس حقيقي نشتقها من الخارج ثم من الداخل

مثال 33

إذا كانت $y = 4 \times (2x^2 + 3x - 2)^5$

فإن $y' = 20(2x^2 + 3x - 2)^4 \times (4x + 3)$

مثال 34

تتبع خطوات الاشتقاق في كل من الامثلة الاتية :-

$$a)\ y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} = (x^{13} + 13 + x^{-13})^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = \frac{1}{5}(x^{13} + 13 + x^{-13})^{\frac{-4}{5}}(13x^{12} - 13x^{-14})$$

$$b)\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^4 + 1) - 4x^3(x^3 - 1)}{(x^4 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^6 + 3x^2 - 4x^6 + 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 4x^3 - x^6}{(x^4 + 1)^2}$$

$$c)\ y = \left(\frac{x + 2}{x^2 - 3x}\right)^2$$

$$y' = 2\left(\frac{x + 2}{x^2 - 3x}\right)\left[\frac{(x^2 - 3x) - (2x - 3)(x + 2)}{(x^2 - 3x)^2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{x + 2}{x^2 - 3x}\right)\left[\frac{x^2 - 3x - 2x^2 - x + 6}{(x^2 - 3x)^2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{x + 2}{x^2 - 3x}\right)\left[\frac{-x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 3x)^2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{(x + 2)(-x^2 - 4x + 6)}{(x^2 - 3x)^3}\right)$$

تكملة

$$= 2\left(\frac{(x+2)(-x^2-4x+6)}{(x^2-3x)^3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-x^3-4x^2+6x-2x^2-8x+12}{(x^2-3x)^3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-x^3-6x^2-2x+12}{(x^2-3x)^3}\right) = \frac{-2x^3-12x^2-4x+24}{(x^2-3x)^3}$$

$d)\ g(x) = (x^3-2x^2)^4$

$$g'(x) = 4(x^3-2x^2)^3(3x^2-4x)$$

$e)\ y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{5x^3}{2}$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}(3x^2) = \frac{1}{2} - \frac{15}{2}x^2$$

$f)\ h(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^5} \Rightarrow h(x) = (1+x^2)^{\frac{5}{3}}$

$$h'(x) = \frac{5}{3}(1+x^2)^{\frac{2}{3}}(2x)$$

$$= \frac{10x}{3}(1+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{10x}{3}\sqrt[3]{(1+x^2)^2}$$

$i)\ y = \dfrac{7}{x^9} \Rightarrow y = 7x^{-9}$

$$y' = -63x^{-10} = \frac{-63}{x^{10}}$$

$g)\ y = \dfrac{5}{x^2-7x+3}$

$$y' = \frac{(x^2-7x+3).0 - 5(2x-7)}{(x^2-7x+3)^2}$$

$$= \frac{-10x+35}{(x^2-7x+3)^2}$$

$h)\ f(x) = (4x^2-3)^2 \times (x+5)$

$$f'(x) = (4x^2-3)^2 \times 1 + (x+5) \times 2(4x^2-3)^1 \times 8x$$

$$= (4x^2-3)^2 + 16x(4x^2-3) \times (x+5)$$

$$= (4x^2-3)[(4x^2-3) + 16x(x+5)]$$

$$= (4x^2-3)[4x^2-3+16x^2+80x]$$

$$= (4x^2-3)[20x^2+80x-3]$$

تمارين (6-3)

1. جد المشتقة لكل من الدوال الاتية :-

1) $f(x) = 2x - 3$

2) $f(x) = x^3 + 2x - 5$

3) $f(x) = \sqrt{x} + 1$

4) $f(x) = \frac{3}{x+2}$

5) $f(x) = 2x^2 - 5x^{-2} + 3x^3 - x^{-1}$

6) $f(t) = \frac{t^2}{t^2+2}$

7) $y = (x^4 - 3x)^{-2}$

8) $y = \frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$

9) $y = \left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-2}$

10) $y = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$

11) $y = (4x^2\sqrt{x^3})^{\frac{1}{4}}$

12) $f(t) = \sqrt{\frac{t-2}{t^2+5}}$

13) $y = \left(\frac{x+3}{x^2+1}\right)^5$

14) $y = x(x^2-2)^7$

2. جد معادلة المماس والعمود عليه للمنحني الذي معادلته $f(x) = x^2 + 2x + 1$ عند النقطة $(1, 4)$

3. جد معادلة المماس للمنحني الذي معادلته $f(x) = x^3 - 1$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

4. جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $S(t) = \sqrt{3t^2 + 24}$، حيث S الازاحة بالأمتار ، t الزمن بالثواني . جد الزمن اللازم ليصل الى سرعة $1\ m/sec$.

6-7 المشتقات من الرتب العليا

لتكن $f(x)$ دالة مشتقتها $f'(x)$ ، يطلق على $f'(x)$ أسم المشتقة الاولى وهي دالة لنفس المتغير x أذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة فانه يطلق عليها اسم المشتقة الثانية للدالة وعليه فان المشتقة الثانية هي مشتقة المشتقة الاولى ويرمز لها بأحد الرموز الاتية :-

$$f''(x) \quad , \quad y'', \quad \frac{d^{(2)}y}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^{(2)}}{dx^2}(f(x))$$

وهكذا تعرف المشتقة ذات الرتبة n للدالة $y = f(x)$ بانها مشتقة المشتقة ذات الرتبة $(n-1)$ ويرمز لها بأحد الرموز الاتية :-

$$f^{(n)}(x) \quad , \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^{(n)}y}{dx^n} \quad , \quad \frac{d^{(n)}}{dx^n}[f(x)]$$

مثال 35

جد المشتقة الثانية لكل من الدوال الاتية :-

$$a)\ f(x) = (x^2+3)^{\frac{5}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}.2x$$

$$= 5x(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = 5x.\left(\frac{3}{2}(x^2+3)^{\frac{1}{2}} \times 2x\right) + (x^2+3)^{\frac{3}{2}}.5$$

$$f''(x) = 15x^2.(x^2+3)^{\frac{1}{2}} + 5(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$$

$$b)\ f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x.0 - 1.1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x^2.0 - (-1).2x}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

تمارين (6-4)

1. جد المشتقة لكل من الدوال الاتية :-

$a)\ f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x + 3$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{3x}{x-1}$

$c)\ f(x) = \sqrt{x^3+3} + 5x$ $\qquad d)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

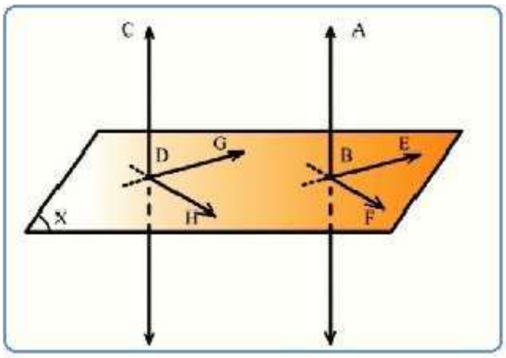
$e)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad f)\ f(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. جد المشتقة الثالثة $\left(\frac{d^{(3)}y}{dx^3}\right)$ إذا كانت: $y = 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

3. إذا علمت ان $f(x) = \frac{2}{x^2}$ أثبت صحة المتطابقة الاتية :-

$$f'''(x) + f''(x) + f'(x) + f(x) = \frac{2x-4}{x^3} + \frac{12x-48}{x^5}$$

الفصل السابع



الهندسة الفراغية (المجسمة)

الفصل السابع

الهندسة الفراغية (المجسمة)

(*Solid Geometry*)

البنود
(SECTIONS)

Vocabulary	الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
Straight line	$\overleftrightarrow{AB}$	المستقيم AB
length	$\lVert AB \rVert$	طول القطعة المستقيمة AB
Plane	(X)	المستوي X
Intersection	$\cap$	تقاطع
Implies	$\Rightarrow$	يؤدي الى
Measure of an angle	$m\sphericalangle$	قياس الزاوية
Perpendicular	$\perp$	عمود على
Parallel	$/\!/$	يوازي
Not Parallel	$\nparallel$	لا يوازي
Null set	$\emptyset$	مجموعة خالية
Belongs to	$\in$	ينتمي الى
Doesn't Belong to	$\notin$	لا ينتمي الى
Subset	$\subset$	مجموعة جزئية
Therefore	$\therefore$	اذن
Because	$\because$	بما ان
Identical t o	$\equiv$	متطابق مع

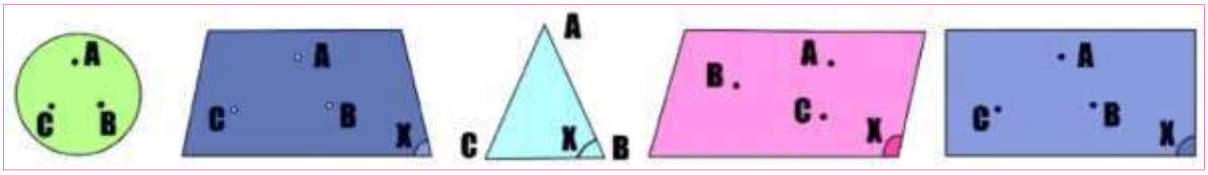
1-7 الهندسة الفراغية (المجسمة) Space Geometry

1-1-7 تمهيد

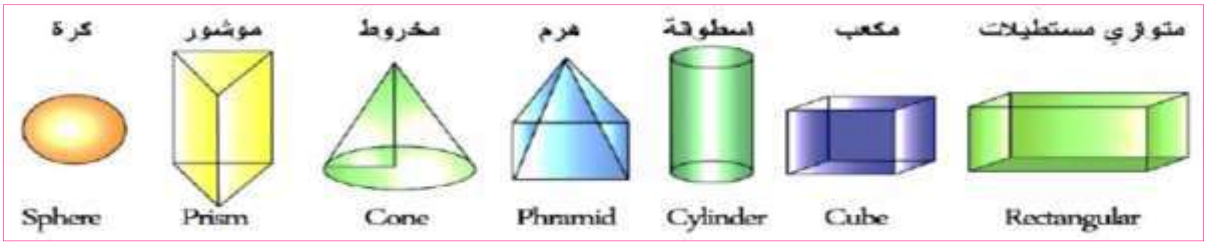
تعلمت في الهندسة المستوية كلاً من النقطة (*point*) والمستقيم (*Line*) حيث رمزنا له $\overleftrightarrow{AB}$ او $\overleftrightarrow{L}$ واستخدمنا الرمز $\overline{AB}$ للدلالة على قطعة المستقيم AB والرمز $\|AB\|$ للدلالة على طول القطعة المستقيمة AB.

وسندرس مصطلح هندسي يدعى المستوي *plane* وهو الذي لو أخذت عليه أي نقطتين ووصل بينهما بمستقيم لأنطبقت جميع نقاط ذلك المستقيم عليه مثل زجاج النافذة ، سطح المنضدة ، ساحة ملعب كرة القدم ، ....

وهو بلا حدود من جميع جهاته ويمثل على شكل مثلث *Triangle* ، مربع *Square* ، مستطيل *Rectangle* ، متوازي أضلاع *Parallelogram* ، شبه منحرف *Trapezoid* ، دائرة Circle ، .... ويرمز له (X) او (Y) ويقرأ المستوي X أو Y كما في الاشكال الاتية :-

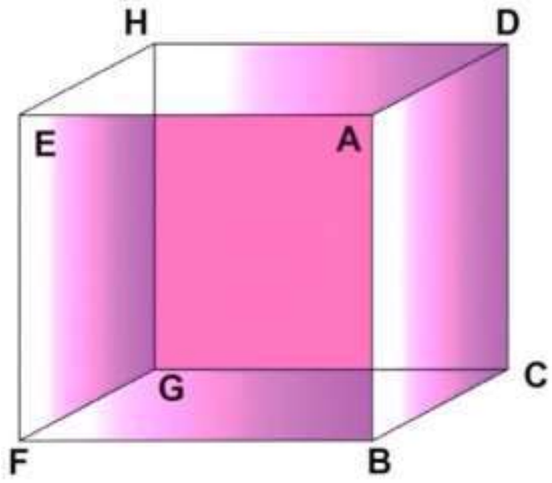


ودرست العلاقة بين النقطة والمستقيم التي يحويها مستو واحد كما درست بعض المجسمات مثل :



كما شاهدت غيرها كالأجهزة المنزلية (الثلاجة ، الغسالة ، المبردة ، التلفزيون ، ...) والسيارات والعمارات وهي تمثل اشكالاً هندسية ذات ثلاثة أبعاد وتشغل حيزاً من الفراغ وأن دراستها تسمى بالهندسة الفراغية وهي تدرس العلاقة بين النقط والمستقيمات والمستويات التي يحويها الفضاء.

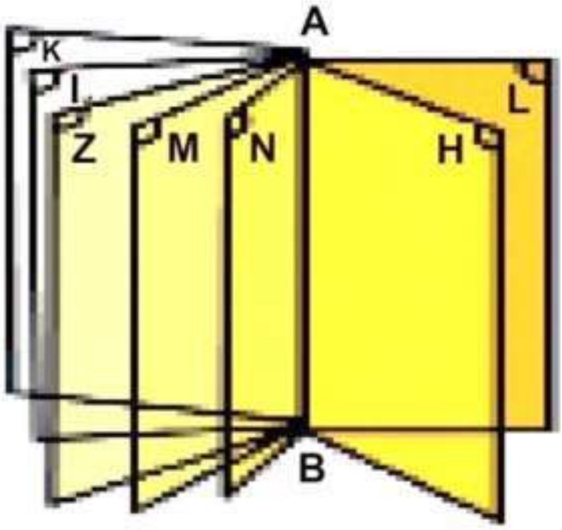
نشاط (1)



في الشكل المجاور اذكر:

1) المستقيمات التي تمر بالنقطة A.
2) المستقيمات التي تمر بالنقطتين B ، A معاً
3) المستويات التي تمر بالنقطة A.
4) المستويات التي تمر بالنقطتين B ، A معاً

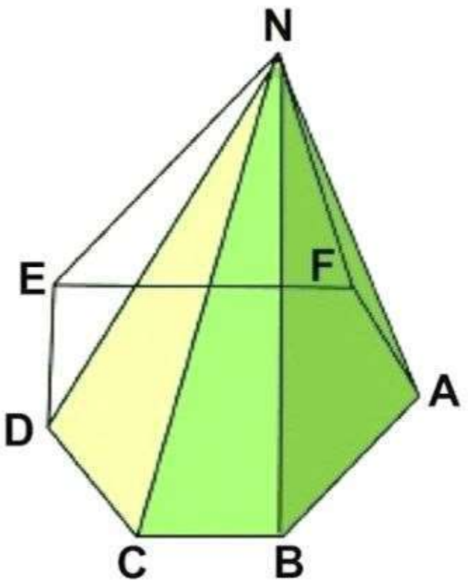
نشاط (2)



في الشكل المجاور:

1) اذكر المستويات التي تمر بالنقطة A.
2) اذكر المستويات التي تمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

نشاط (3)



في الشكل المجاور:

1) اذكر مستقيماً يمر بالنقطة N.
2) اذكر مستوياً يمر بالنقطة N.
3) اذكر مستوياً يمر بالنقطتين N ، A.
4) اذكر مستوياً يمر بالنقاط N ، A ، B.
5) اذكر أربع نقط ليست في مستوٍ واحد.
6) كم مستوٍ يمر بالنقطة N.

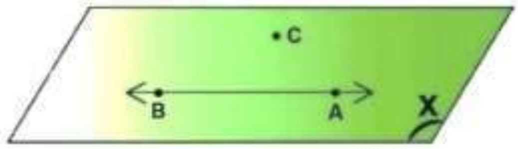
مما سبق نستنتج :

2-1-7 عبارة أولية :

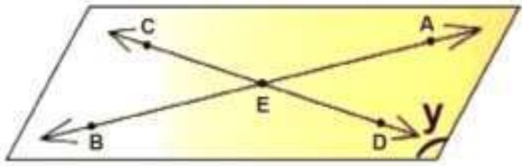
لكل ثلاث نقاط على استقامة واحدة Non collinear يوجد مستوٍ واحد فقط (وحيد) يحويها.

ومنها نحصل على :

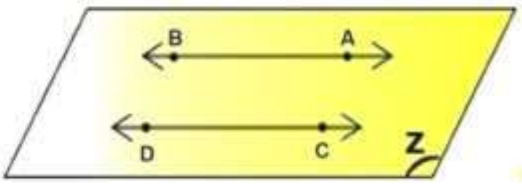
أ) لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوٍ وحيد يحويها.



ب) لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.



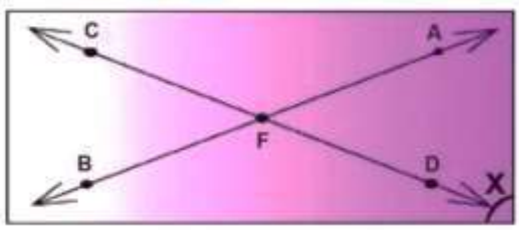
ج) لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما



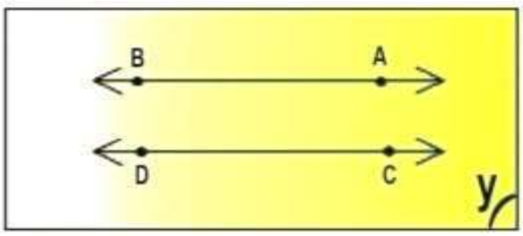
2-7 العلاقة بين المستقيمات والمستويات في الفضاء

1-2-7 العلاقة بين مستقيمين في الفضاء:

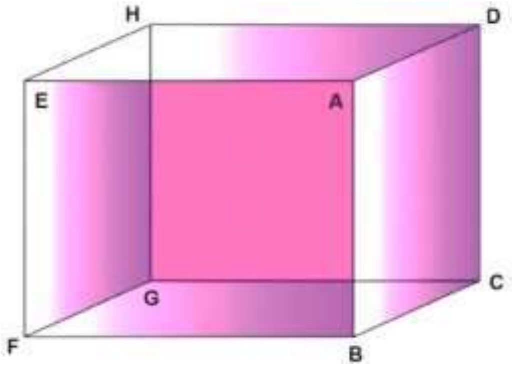
أ) المستقيمان المتقاطعان Intersecting Lines : اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهما في مستوٍ واحد.



ب) المستقيمان المتوازيان Parallel lines : إذا لم يشتركا بأية نقطة وهما في مستوٍ واحد.



ج) المستقيمان المتخالفان skew lines : اللذان لا يمكن أن يحتويهما مستوٍ واحد (أي انهما غير متقاطعين وغير متوازيين).
(أي أن مجموعة تقاطعهما خالية ولا يحتويهما مستوٍ واحد)



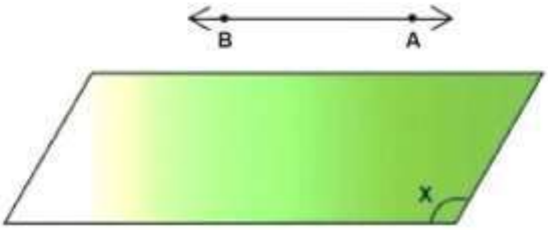
نشاط :

من الشكل المجاور نلاحظ $\overleftrightarrow{DH}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ متخالفين:

أ) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.
ب) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.
ج) أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.

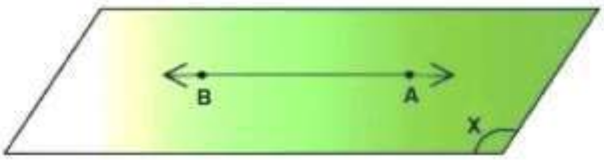
2-2-7 العلاقة بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

أ) المستقيم الموازي للمستوي : إذا لم يشترك معه بأية نقطة أو كان محتوى فيه.



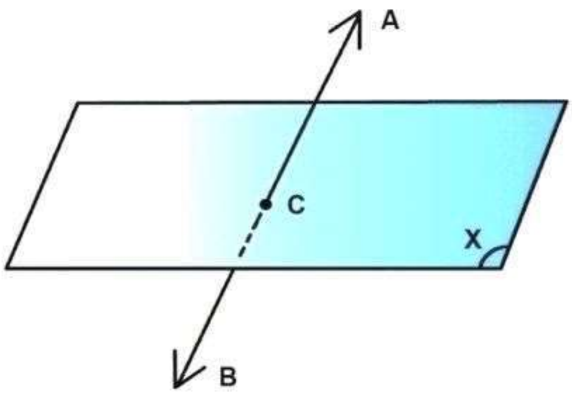
$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \emptyset$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$



$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

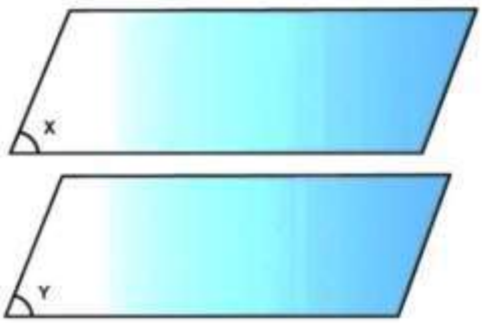
ب) المستقيم القاطع للمستوي : إذا اشترك معه بنقطة واحدة فقط (X).



$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{C\}$

3-2-7 العلاقة بين مستويين في الفضاء:

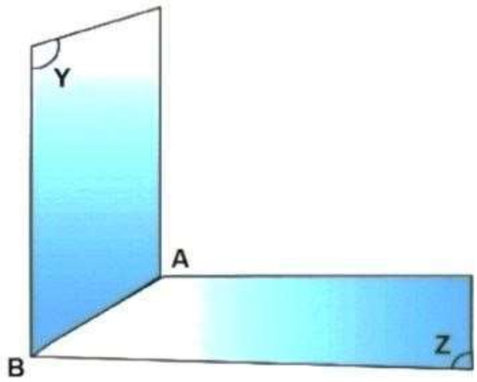
أ) المستويان المتوازيان : إذا لم يشتركا بأية نقطة.



$(X) \cap (Y) = \emptyset$

$\therefore (X) \mathbin{/\!/} (Y)$

ب) المستويان المتقاطعان : إذا اشتركا بمستقيم.



$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

نلاحظ أنه إذا اشترك المستويان بنقطة فأنهما يشتركان بخط مستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين ويسمى (مستقيم التقاطع) ويكون محتوى في كليهما.

ملاحظة:

أ) التساوي : إسمان لشيء واحد.

ب) كل مستقيم يوازي نفسه.

ج) كل مستوى يوازي نفسه.

مما تقدم نستنتج :

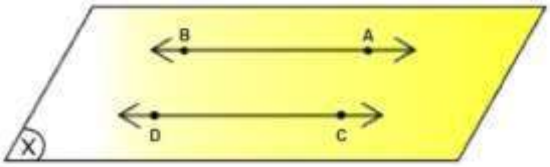
أ) إذا توازى مستقيمان فالمستوي المار بأحدهما ونقطة من الآخر فإنه يحويهما.

إذا كان: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$C \in (X)$

فإن: $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

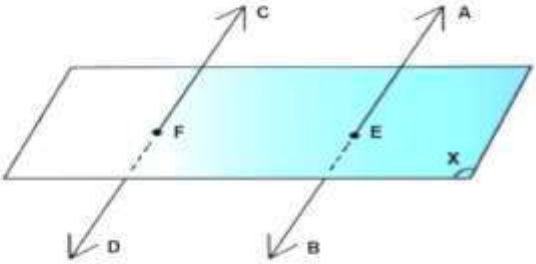


ب) المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر.

إذا كان: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في E

فإن: $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X) في F

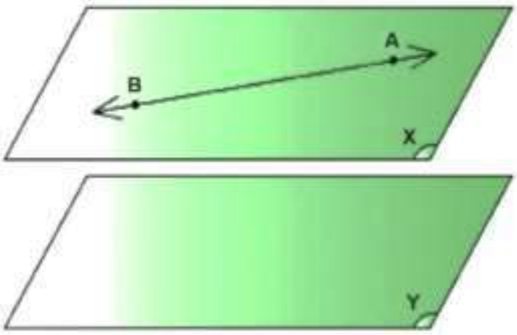


ج) إذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في أحدهما يوازي الآخر.

إذا كان: $(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

فإن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$



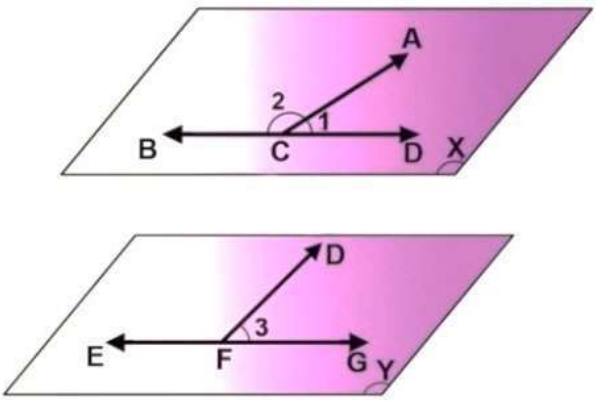
د) إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما أو تكاملتا وتوازى مستويهما.

إذا كان: $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DF}$

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

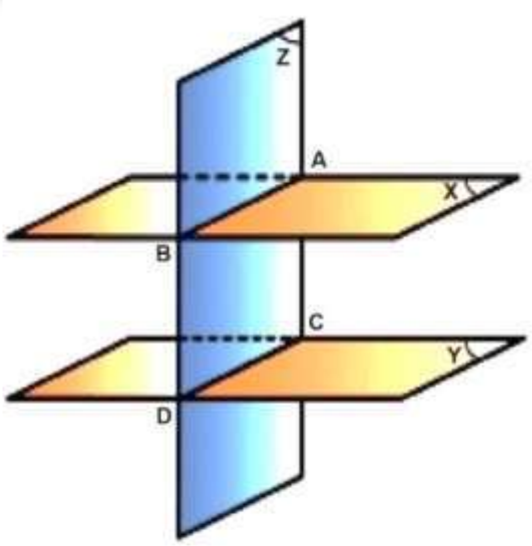
فإن: $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 3$

$m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = 180°,\ (X) \parallel (Y)$



3-7 مبرهنة (1) : Theorem

خطّا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيين



المعطيات:

$(X) \parallel (Y)$

$(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

$\begin{cases}(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB} \\ (Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}\end{cases}$ (معطى)

$\therefore \begin{cases}\overleftrightarrow{AB} \subset (X),\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Z) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Y),\ \overleftrightarrow{CD} \subset (Z)\end{cases}$ (مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

في (Z) إذا لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فسوف يقطعه في نقطة مثل E

$\therefore \begin{cases}E \in \overleftrightarrow{AB} \subset (X) \Rightarrow E \in (X) \\ E \in \overleftrightarrow{CD} \subset (Y) \Rightarrow E \in (Y)\end{cases}$ (مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

$\therefore E \in (X) \cap (Y)$ (لإشتراكهما في نقطة E)

وهذا خلاف الفرض حيث $(X) \parallel (Y)$

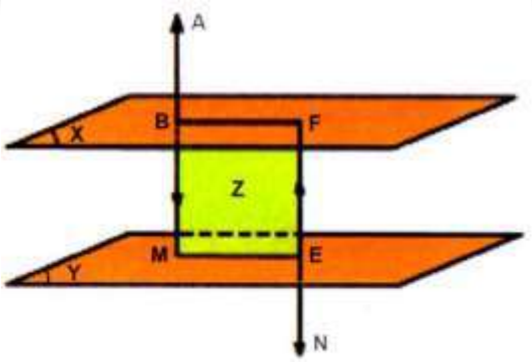
إذن $\overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (يتوازى المستقيمان إذا وقعا في مستوٍ واحد)

و.هـ.م

7-3-1 نتيجة:

المستقيم الذي يقطع أحد مستويين متوازيين يقطع الآخر أيضاً



المعطيات:

$(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) في B

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (Y)

البرهان:

لتكن $E \in (Y)$

نرسم $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EN}$ (يمكن رسم مستقيم مواز لآخر من نقطة لا تنتمي اليه)

نعين (Z) بالمستقيمين $\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ (يتعين مستوي وحيد بمستقيمين متوازيين)

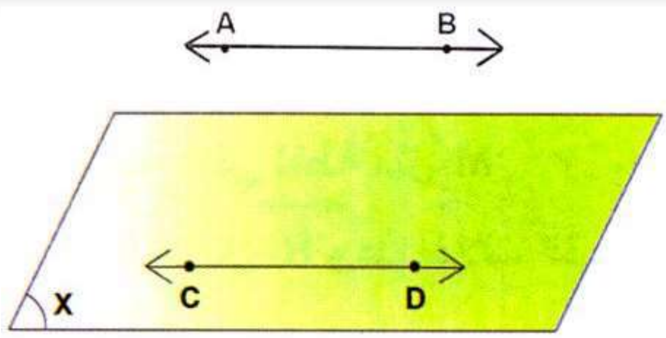
$\overleftrightarrow{EM} \parallel \overleftrightarrow{FB}$ (خطْا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث متوازيين)

إذن $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع(Y) في M

و.هـ.م

7-4 مبرهنة (2) : Theorem

إذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

البرهان:

إذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ لا يوازي (X) فيقطعه بنقطة مثل E

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X) (المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

وهذا خلاف الفرض لأن $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

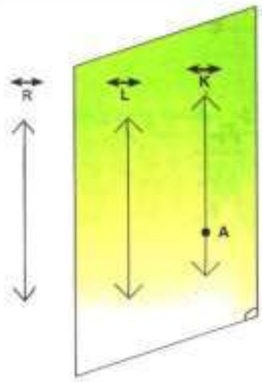
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع (X)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

و.هـ.م

5-7 مبرهنة (3) Theorem :

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان



المعطيات:

$\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{R}$ ، $\overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{R}$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

البرهان:

لتكن $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم L ونقطة A نعين (X) (يتعين مستو وحيد بمستقيم ونقطة لا تنتمي اليه)

إن لم يكن $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فسوف يقطعه في A

$\therefore$ $\overleftrightarrow{R}$ يقطع (X) وهذا مستحيل (المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$

في (X) إن لم يكن $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$ ، فيقطعه في نقطة مثل M

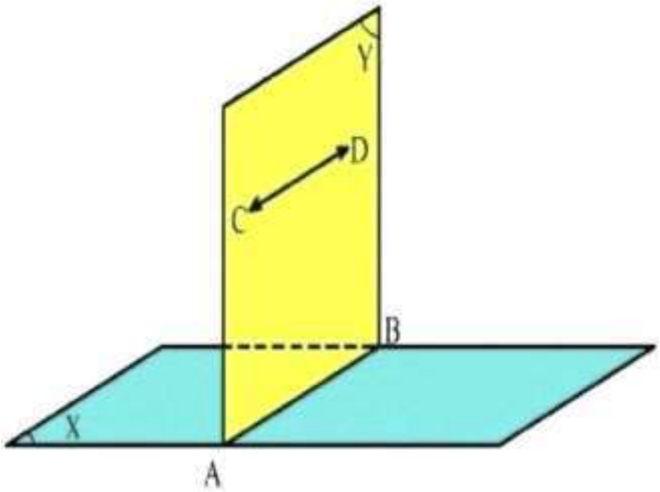
ينتج وجود مستقيمين مرسومين من M يوازيان $\overleftrightarrow{R}$ وهذا خلاف الفرض (عبارة التوازي)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{K}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{L}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$ و.هـ.م

6-7 مبرهنة (4) : Theorem

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

(معطى) $\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$

في (Y) لو كان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ لنتج أن $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (X)

(مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين)

وهذا خلاف الفرض حيث

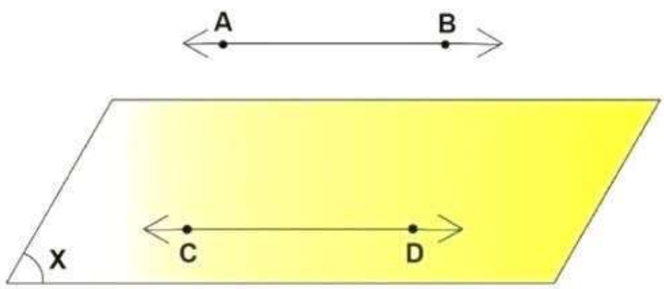
$\overleftrightarrow{CD} \parallel (X)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

1-6-7 نتيجة

إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي



المعطيات:

$C \in (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

البرهان:

إذا لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ فيكون قاطعاً له في نقطة C

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) (المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

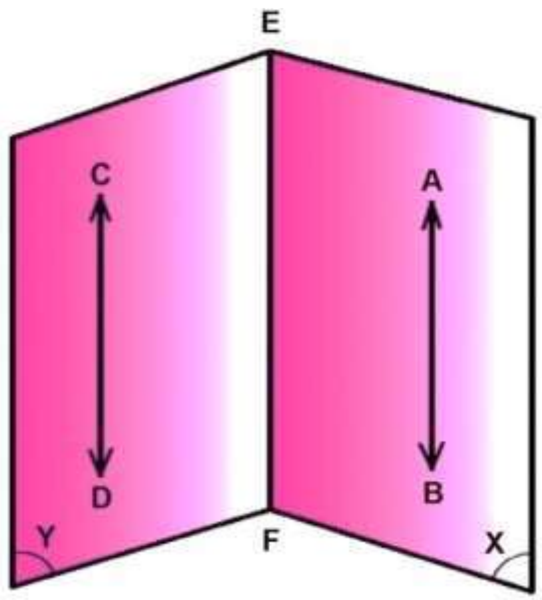
وهذا خلاف الفرض حيث $\overleftrightarrow{AB} \parallel (X)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD}$ لا يقطع (X) بل محتوى فيه

و.هـ.م

مثال

إذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على أحد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلاً من المستقيمين المتوازيين



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{EF}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (Y)$ (إذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي أحدهما يوازي الآخر)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

(مبرهنة 4- مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في أحدهما ويوازي الآخر)

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ (المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان)

و.هـ.م

تمارين (7-1)

1. أي من العبارات الآتية خاطئة أي منها صائبة وبين السبب:

a) إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ فيوجد مستقيم وحيد يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ ومحتوى في (X).

b) يوجد مستوٍ وحيد موازٍ لمستوٍ معلوم.

c) المستقيمان الموازيان لمستوٍ واحد متوازيان.

d) إذا وازى ضلعان من مثلث مستوياً معلوماً كان ضلعه الثالث موازياً للمستوي المعلوم.

e) المستقيمان المخالفان لمستقيم ثالث متخالفان.

f) إذا كان (X) ، (Y) مستويين غير متوازيين فإنهما يتقاطعان بنقطة واحدة.

g) إذا كانت $A, B \in (X)$ فإن $\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{A, B\}$

h) كل مستقيم يمكن أن يمر به عدد غير منته من المستويات.

i) عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة هو (3) مستويات.

j) يوجد مستوٍ وحيد يحوي مستقيمين متخالفين.

2. صحح ما تراه خطأ في العبارات الآتية:

a) إذا كان $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ ، $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فإن $\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{K} = \{A\}$ حيث $A \in (X)$.

b) يتقاطع المستويان المختلفان في مستو.

c) إذا كان تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ والمستوي (X) يساوي $\emptyset$ فإن $\overleftrightarrow{L} \mathbin{/\!/} (X)$.

d) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{L} \mathbin{/\!/} (X)$ فإن $\overleftrightarrow{L} \cap (X) = \{A\}$ حيث $A \in (X)$.

e) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{K} \subset (X)$ فإن $\overleftrightarrow{K} \cap (X) = \emptyset$

f) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

g) المستقيم المحتوي في أحد مستويين متوازيين يقطع المستوي الآخر.

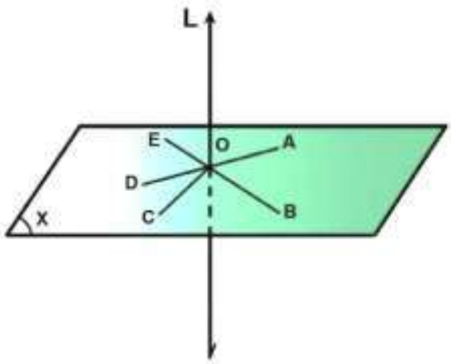
h) إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوٍ وتقاطع المستويان فإن مستقيم تقاطعهما يقطع كلا المستقيمين.

i) إذا قطع مستوٍ كلاً من مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متخالفين.

7-7 تعامد المستقيمات والمستويات :

تعريف:

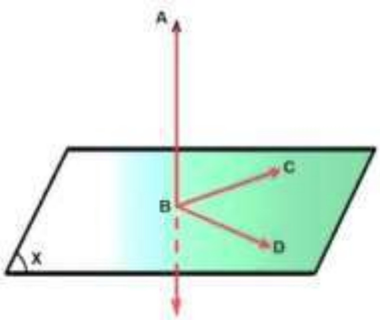
1. المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي.



$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \ldots \subset (X) \quad , \overleftrightarrow{L} \perp (X)$

فيكون $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, \ldots$

2. المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطه تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها.



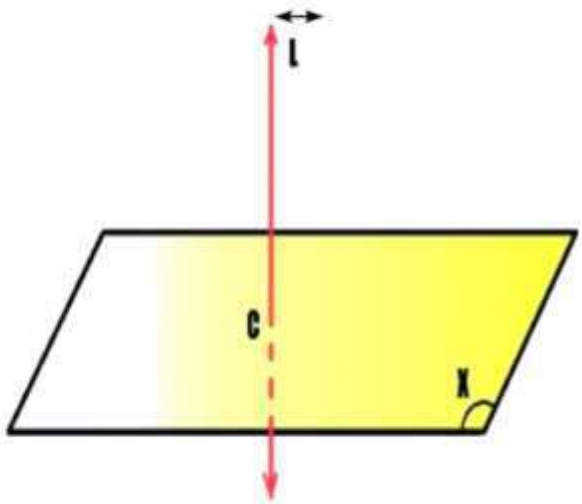
$\overleftrightarrow{BC} ، \overleftrightarrow{BD} \subset (X)$

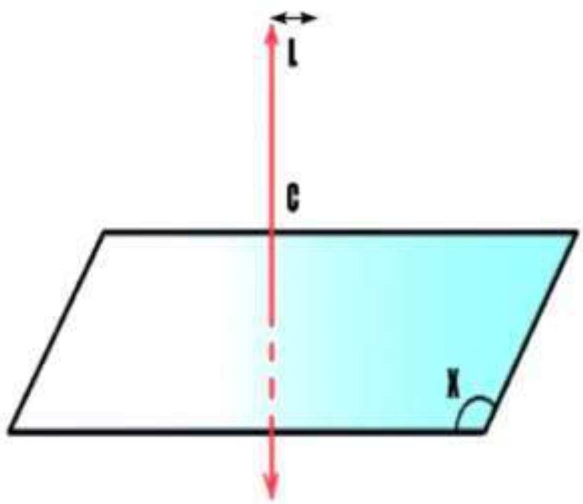
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC} ، \overleftrightarrow{BD}$

فيكون $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

وهو الشرط اللازم والكافي كي يكون المستقيم عمودي على المستوي.

3. من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم.

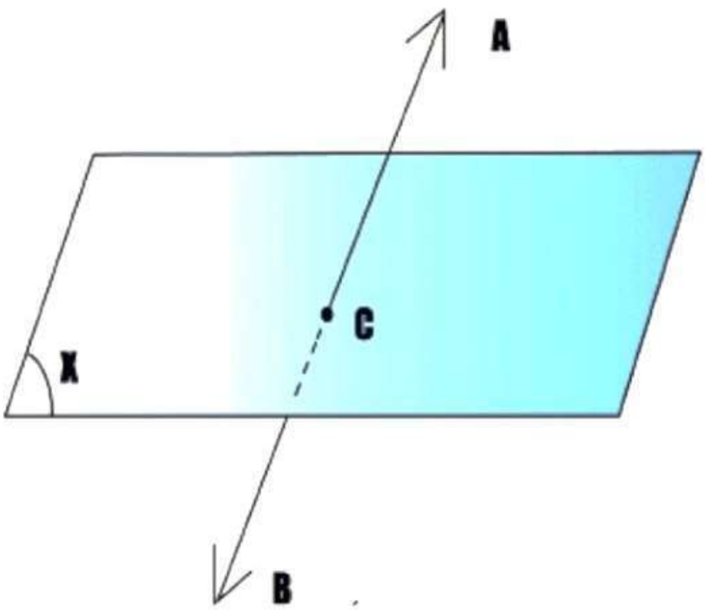




C نقطة أما $C \in (X)$ أو $C \notin (X)$

$\therefore$ يوجد مستقيم وحيد مثل $\overleftrightarrow{L}$ يمر من نقطة C بحيث $\overleftrightarrow{L} \perp (X)$

4. يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على المستوي (X) إذا كان قاطعاً له وغير عمودي عليه.



$\overleftrightarrow{AB} \cap (X) = \{C\}$

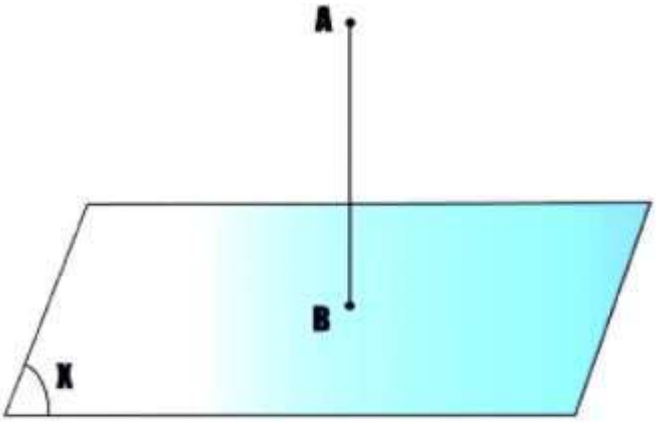
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي (X)

$\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (X)

ملاحظة:

يكون $\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X) اذا كان مائلاً عليه أو موازياً له

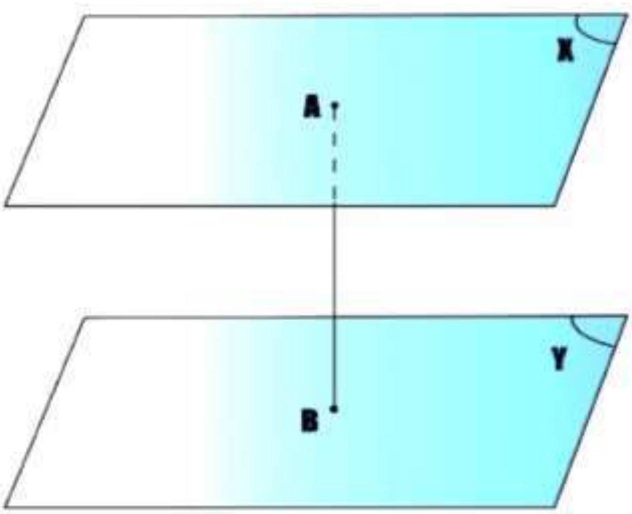
5. يقال لطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة وأثر العمود النازل منها على المستوي المعلوم (بعد النقطة المعلومة عن المستوي).



$\overleftrightarrow{AB}$ هو بعد النقطة A عن (X)

وهو أقصر مسافة بين النقطة A و (X)

6. يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين متوازيين والمحددة بهما (البعد بين المستويين المتوازيين).



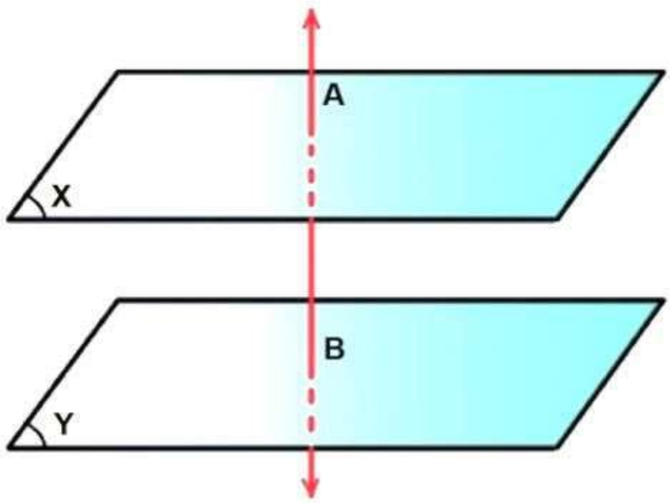
ملاحظة:

البعد بين مستويين متوازيين ثابت

إذا كان $(X) \parallel (Y) \;,\; \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \;,\; \overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

$\overleftrightarrow{AB}$ يمثل البعد بين (X) , (Y)

7. المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.

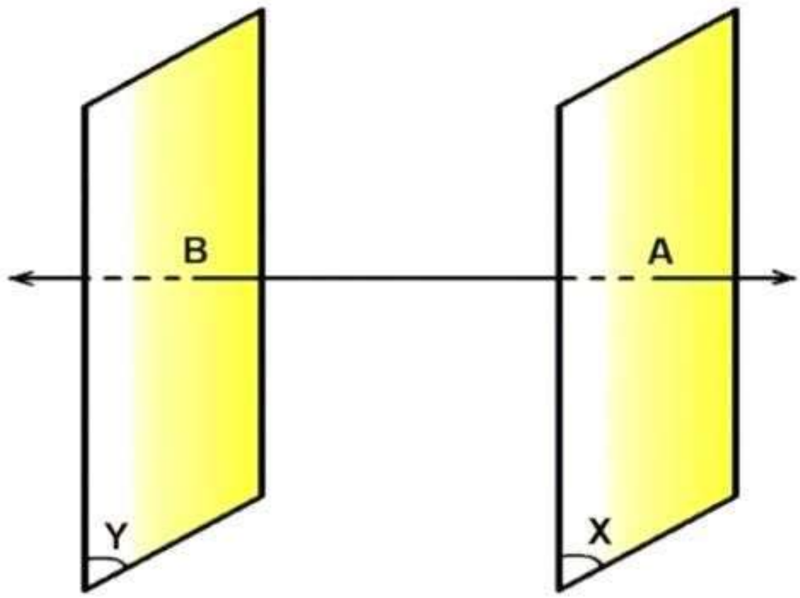


إذا كان $(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

فإن $\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

8. المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان.



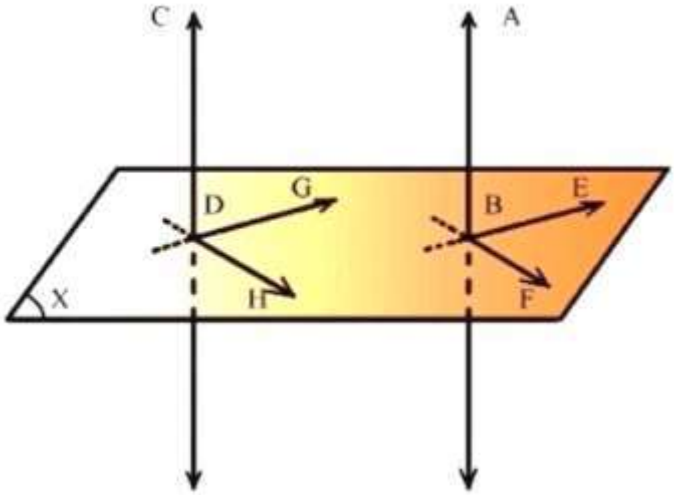
إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Y)$

فإن $(X) \parallel (Y)$

8-7 مبرهنة (5) Theorem

المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان:

$\overleftrightarrow{CD} \cap (X) = \{D\}$ (المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الآخر)

في (X) نرسم $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$

ثم نرسم $\overrightarrow{DG}$ ، $\overrightarrow{DH}$

$\begin{cases} \overrightarrow{DG} \parallel \overrightarrow{BE} \\ \overrightarrow{DH} \parallel \overrightarrow{BF} \end{cases}$ (عبارة توازي)

$\therefore \begin{cases} m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle CDG \\ m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle CDH \end{cases}$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستواهما)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF}$ (العمود على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore m\sphericalangle ABE = m\sphericalangle CDG = 90^\circ$

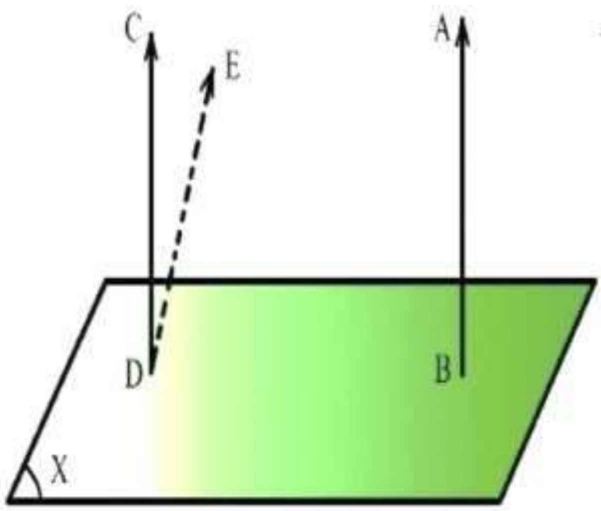
$m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle CDH = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويها)

و.هـ.م

1-8-7 نتيجة

المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

إن لم يكن $\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CD}$

من $D \in (X)$ نرسم $\overleftrightarrow{DE} \,/\!/\, \overleftrightarrow{AB}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد موازٍ لأخر من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DE} \perp (X)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\because$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

أصبح من نقطة D وجود مستقيمين عموديين على (X) وهذا غير ممكن

(من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم)

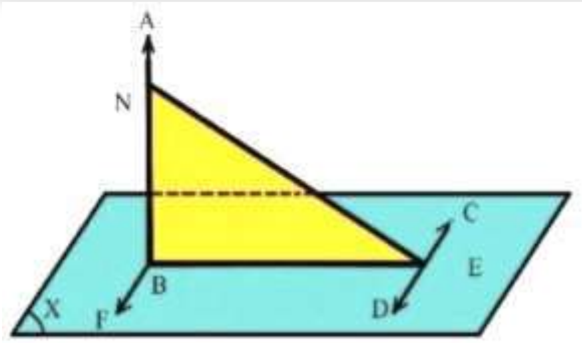
$\therefore$ $\overleftrightarrow{DE} = \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

9-7 مبرهنة (6) Theorem

مبرهنة الأعمدة الثلاثة: إذا رسم من نقطة في مستو مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات: $B \in (X)\ ,\ \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)\ ,\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب إثباته: $\forall\, N \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{BF} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CD}$ (عبارة توازي)

$\because\ \overleftrightarrow{CD} \subset (X)$ (معطى)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \subset (X)$ (اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي أحدهما ونقطة من الآخر يحتويها)

$\because\ \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{BE}$ (في المستوي الواحد المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\because\ \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore\ \overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{BF}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF} \perp (NBE)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\therefore\ \overleftrightarrow{CD} \perp (NBE)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

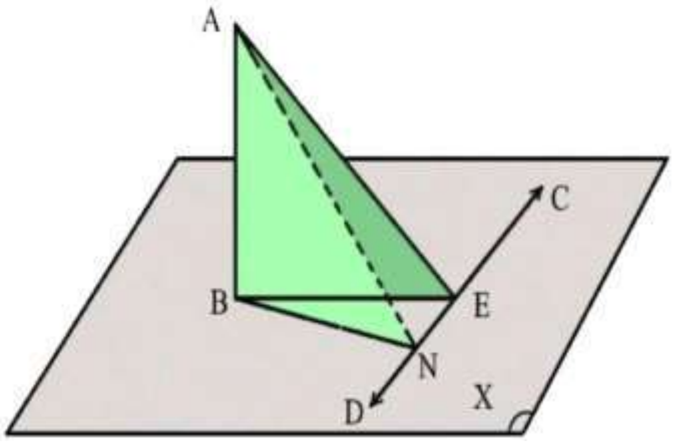
$\therefore\ \overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي)

وهذا شأن كل مستقيم يصل أية نقطة من نقاط $\overleftrightarrow{AB}$ بالنقطة E يكون عمودياً على $\overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

1-9-7 نتيجة مبرهنة (6) الاعمدة الثلاثة

اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والآخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي. فالمستقيم الواصل بين أثري العمودين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات:

$A \notin (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب إثباته:

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان:

إن لم يكن $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيدعلى مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي له)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$ (يمكن رسم مستقيم عمود وحيدعلى مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي له)

$\therefore$ $N = E$

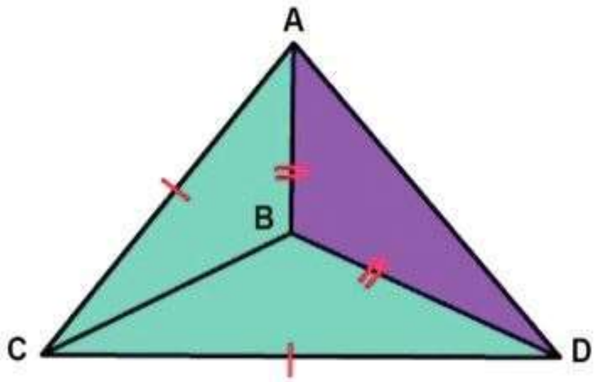
$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

و.هـ.م

أمثلة محلولة

1. مثلث BCD قائم الزاوية في B ، A نقطة ليست في مستوي هذا المثلث بحيث $\overline{AB} = \overline{BD}$ ، $\overline{AC} = \overline{CD}$ برهن أن $\overline{BC}$ عمودي على مستوي المثلث ABD.



المعطيات:

المثلث BCD قائم الزاوية في B

$A \notin (BCD)$

$\overline{AB} = \overline{BD}$

$\overline{AC} = \overline{CD}$

المطلوب إثباته:

$\overline{BC} \perp (ABD)$

البرهان:

المثلثان ABC , BCD

$\overline{AB} = \overline{BD}$ (معطى)

$\overline{AC} = \overline{CD}$

$\overline{BC}$ مشترك

$\therefore$ يتطابق المثلثان (لتساوي ثلاثة أضلاع)

من التطابق ينتج

$m\sphericalangle CBD = m\sphericalangle ABC = 90^\circ$

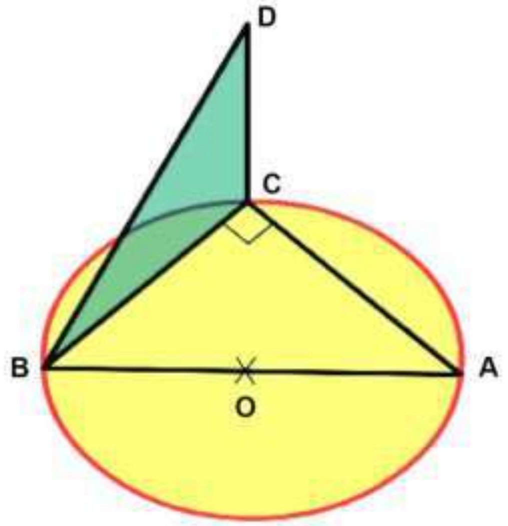
$\because$ $\overline{BC} \perp \overline{BD}$ $\quad$ $m\sphericalangle CBD = 90^\circ$ (معطى)

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$ $\quad$ $m\sphericalangle ABC = 90^\circ$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overline{BC} \perp (ABD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

2. $\overline{AB}$ قطر في دائرة من نقطة مثل C على الدائرة رُسم $\overline{CD}$ عمودي على مستوي الدائرة برهن ان $\overline{AC}$ عمودي على المستوي (BCD).



المعطيات:

$\overline{AB}$ قطر دائرة

C نقطة على الدائرة

$\overline{CD}$ عمود على مستوي الدائرة

المطلوب إثباته:

$\overline{AC} \perp (BCD)$

البرهان:

$\because$ $\overline{AB}$ قطر دائرة مركزها O (معطى)

$\therefore$ $m\sphericalangle ACB = 90°$ (الزاوية المحيطية المرسومة في نصف قطر دائرة قائمة)

$\therefore$ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

أي أن $\overline{CD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{AC} \perp \overline{CD}$ (المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى)

$\overline{AC} \perp (BCD)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

تمارين (2-7)

1. ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $\overline{AB} = 4\ cm$ ، $\overline{BC} = 3\ cm$ رسم $\overline{CD} \perp (ABC)$ بحيث $\overline{CD} = 12\ cm$ جد طول $\overline{AD}$.

2. برهن على ان المستقيمين العموديين على مستويين متقاطعين لا يتوازيان.

3. في $\Delta\, ABC$ ، $m\sphericalangle A = 30^\circ$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$، $\overline{BD} = 5\ cm$ ، $\overline{AB} = 10\ cm$ ، فإذا كان $\overline{BH}$ عمودي على $\overline{AC}$، جد $m\sphericalangle BHD$.