جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الثالث

الفرع الزراعي - فرع الفنون التطبيقية

المؤلفون

أ.م.د. أياد غازي ناصر الشمري

م.م. ياسر عمر ثامر | حازم صبيح مهدي

جمال حمزة جدوع | منى صباح عبد الأمير

الطبعة الثالثة

1446هـ - 2024م

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الاساسية الدراسية التي تساعد الطالب على اكتساب الخبرات التعليمية اللازمة لتنمية قدراته على التفكير.

لقد ظهرت في الكثير من دول العالم المتقدم مناهج حديثة في الرياضيات وطرائق جديدة كانت سببا في إعداد حركة ديناميكية فعالة اثرت في العملية التعليمية في المدارس والمعاهد والجامعات واحدثت تطوراً جذريا وعليه اصبح من الضروري التواصل مع كل ما هو حديث في مجال العلوم التطبيقية الحديثة وخاصة مادة الرياضيات. لذا سارعت المديرية العامة للتعليم المهني وبالتنسيق مع المديرية العامة للمناهج لتطوير المناهج التعليم واساليبه وخاصة الرياضيات التي تلعب دور طليعيا في إرساء دعائم الحضارة والمدنية فهناك علاقة طردية بين احتياجات التنمية الصناعية والزراعية والاقتصادية والمدنية والتكنلوجية بصفة خاصة وبين مناهج الرياضيات في المؤسسات التعليمية بمختلف مستوياتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه وزارة التربية والتنسيق والتعاون المستمر بين المديرية العامة للتعليم المهني والمديرية العامة للمناهج، ولاسيما مناهج الرياضيات فقد تم اعداد خطة علمية لمواكبة التطورات العلمية في مجالات الحياة المختلفة ورفع المستوى العلمي لطلبة فرعي (الزراعي والفنون التطبيقية) في مادة الرياضيات ليكونوا منافسين لأقرانهم من الطلبة في المجالات الاخرى.

ان هذا الكتاب الذي بين ايديكم هو الكتاب الثالث لطلبة الفرعين الزراعي والفنون التطبيقية في المديرية العامة للتعليم المهني وهو في أربع فصول يتناول في الفصل الاول القطوع المخروطية اما الفصل الثاني يتناول التطبيقات على المشتقة ويتناول الفصل الثالث موضوع التكامل اما الفصل الرابع يتناول علم الاحصاء والاحتمالية.

وان هذا الكتاب مرتبط بسلسلة كتب الرياضيات للمراحل السابقة ووفق الاهداف المقررة متبعين الطرق الحديثة، ولابد من الإشارة الى ان الوقت المخصص لكل فصل بمعدل ثلاثة حصص في الاسبوع وما مجموعه (25 اسبوعا) .

الفصل الاول	سبع اسابيع
الفصل الثاني	خمس اسابيع
الفصل الثالث	ثمان اسابيع
الفصل الرابع	خمس اسابيع

نأمل ان يسهم جهدنا هذا في اكتساب المهارات وتنمية الميول لدراسة الرياضيات ولقد توخينا التعقيد في سرد المواضيع العلمية متدرجين من السهل الى الصعب.

واخيراً لا يسعنا الا ان نقدم شكرنا وتقديرنا الى السيدات والسادة منتسبي الدائرة العلمية في المديرية العامة للتعليم المهني ونخص بالذكر منتسبي شعبة المناهج لجهودهم في تقديم كل الخدمات التي من شأنها انجاز هذا الكتاب، كما نثمن جهود الخبراء العلمين والخبير اللغوي والذين ساهموا في هذا الانجاز ونرجو من اخواننا المدرسين ان يوافونا بملاحظاتهم حول الكتاب لكي نتلافى النقص فيه والكمال لله وحدة.

اللهم وفقنا لخدمة عراقنا العزيز وابنائه....

المؤلفون

الفهرست

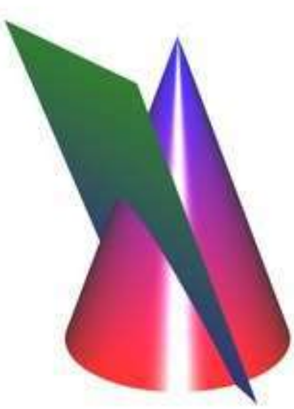
الفصل الأول
(القطوع المخروطية)
CONIC SECTIONS

البنود

1-1 القطوع المخروطية
2-1 الدائرة
3-1 القطع المكافئ
4-1 القطع الناقص
5-1 القطع الزائد

الأهداف السلوكية

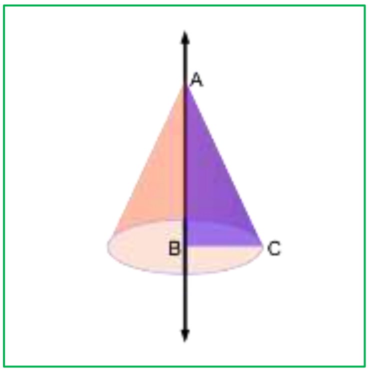
- **يتعرف الطالب على الدائرة ومفهوم الدائرة ورسم الدائرة ومعادلتها إذا كان مركزها نقطة الأصل واذا كان مركزها أي نقطة وتماس الدائرة مع المحورين الإحداثيين.**
- **يتعرف الطالب على مفهوم القطع المكافئ وكيفية تكوينه عن طريق قطع المخروط الدائري القائم بمستوي عمود على قاعدته، ويتعرف على الشكل الهندسي للقطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل ويتمكن من أدارك العلاقة بين بؤرتيه ودليله.**
- **يتعرف الطالب على مفهوم القطع الناقص وكيفية تكوينه عن طريق المخروط الدائري القائم بمستوي لا يوازي قاعدته، ويتعرف على الشكل الهندسي للقطع الناقص ومعرفة معادلته في استخراج (بؤرتيه، رأسيه، قطبيه، طول محوريه ومساحته ومحيطه) وتمثيله بيانياً.**
- **يتعرف الطالب على مفهوم القطع الزائد وكيفية تكوينه عن طريق قطع المخروط الدائري القائم بمستوي يوازي مستويين مولدين من مولداته، ويتعرف على الشكل الهندسي للقطع الزائد الذي رأسه نقطة الأصل وتحديد مواقع (بؤرتيه، رأسيه، قطبيه ، وطول محوريه) وتمثيله بيانياً.**



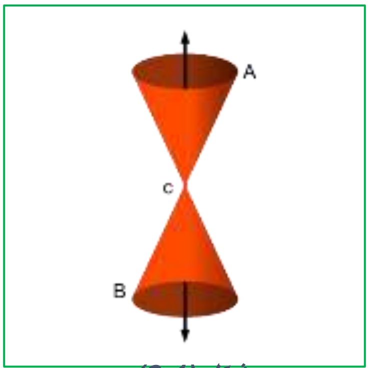
الفصل الأول – القطوع المخروطية - *Conic Sections*

1.1.القطوع المخروطية

يتولد المخروط الدائري القائم من دوران المثلث ABC القائم الزاوية في B دورة كاملة حول احد الضلعين القائمين كمحور للدوران كما في الشكل (1-1) ونلاحظ أن مولدي المخروط يتقاطعان من الرأس ، كما في الشكل (1-2) ويسمى $\vec{L}$ محور المخروط والذي يمكن أن نعرفه (قطعة المستقيم المحددة برأس المخروط ومركز قاعدته) ، ويسمى $\overline{AB}$ مولد المخروط الذي يمكن أن نعرفه (قطعة المستقيم المحددة برأس المخروط وأحد نقاط قاعدته).



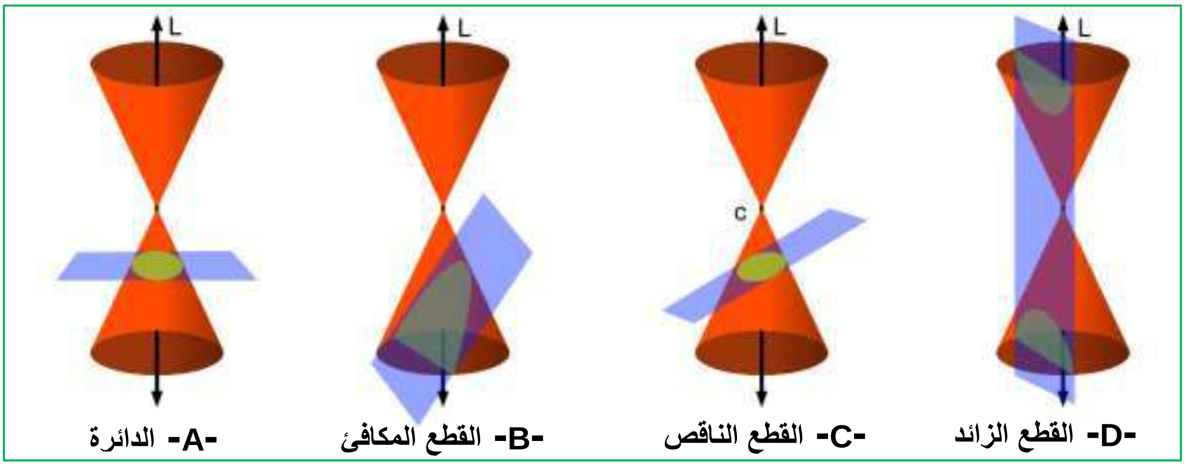
شكل (1-1)



شكل (1-2)

ان الاشكال الهندسية الناتجة من قطع المخروط الدائري القائم بمستو في حالات معينة تسمى قطوع مخروطية وهي:

1) الدائرة $(Circle)$: ونحصل عليها من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستو عمودي على المحور L ويوازي القاعدة وتكبر كلما ابتعدنا عن الراس كما في الشكل (A 1-3).
2) القطع المكافئ $(Parabola)$: ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستو موازي لأحد مولداته كما في الشكل (B 1-3).
3) القطع الناقص $(Ellipse)$: ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستوي غير مواز لقاعدته ولا يوزاي احد مولداته كما في الشكل (C 1-3).
4) القطع الزائد $(Hyperbola)$: ونحصل عليه من قطع سطح المخروط الدائري القائم بمستو موازي لمحوره ويقطع مولدين من مولداته كما في الشكل (D 1-3).



الشكل (1-3)

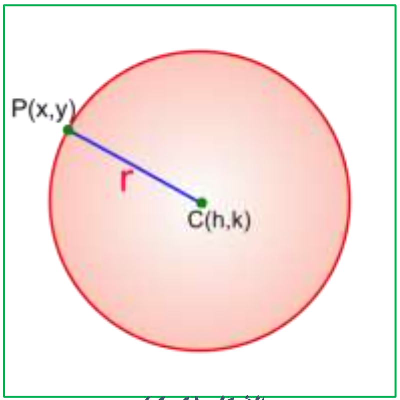
2.1.الدائرة $(Circle)$

1.2.1. تعريف

هي مجموعة من النقاط في المستوي التي يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز $Center$) يساوي مقدار ثابت غير سالب يسمى (نصف القطر $radius$) وسوف نرمز لمركز الدائرة بالرمز (C) ونرمز لنصف القطر (r).

وبلغة المجموعات يمكن التعريف $Circle = \{P: \overline{PC} = r, r > 0\}$

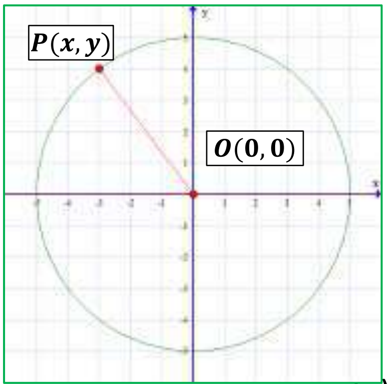
حيث $P(x, y)$ نقطة تنتمي الى الدائرة و C مركز الدائرة و $\overline{PC}$ هي المسافة بين النقطة P والمركز C. كما في الشكل (1-4).



الشكل (1-4)

2.2.1. معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل

لتكن $P(x, y)$ نقطة في المستوي و O نقطة الأصل التي احداثياتها $O(0,0)$ ، ولتكن $\overline{OP}$ المسافة بين النقطة P ونقطة الأصل يمكن استخراجها بقانون المسافة بين نقطتين والمتمثل بنصف قطر الدائر r. كما في الشكل(1-5)



$$\overline{OP} = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ (بتربيع الطرفين)

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (r).

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 4 وحدات.

الحل

$r = 4 \quad \Rightarrow r^2 = 16$

(معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل)$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 = 16$$

مثال 2

جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات، ثم تحقق من أن النقطة (4,3) تنتمي لها.

الحل

$$r = 5 \;\Rightarrow r^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{(معادلة الدائرة)}$$

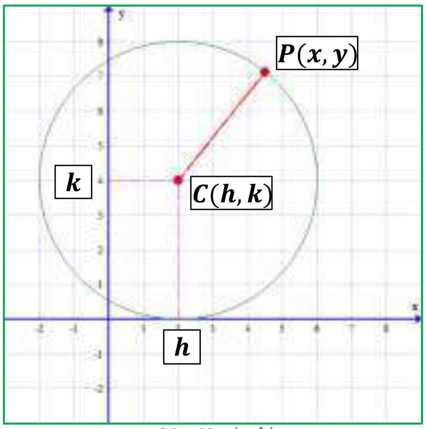
للتحقق من انتماء النقطة (4,3) للدائرة، نعوضها بالمعادلة:

$$(\text{نعوض } x = 4\,, y = 3) \Rightarrow \quad 4^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 25$$

$$16 + 9 = 25$$

عبارة صائبة، أي أن النقطة تحقق المعادلة وبالتالي تنتمي للدائرة.

3.2.1. معادلة الدائرة التي مركزها أي نقطة (الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة)



الشكل (1-6)

لتكن النقطة $P(x, y)$ تنتمي للدائرة التي مركزها $C(h, k)$ كما في الشكل (1-6)، والمسافة بين النقطتين هي نصف قطر الدائرة r بموجب قانون المسافة بين نقطتين:

$$\overline{CP} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

بتربيع الطرفين نحصل على :

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

وهذه المعادلة التي مركزها $c(h, k)$ ونصف قطرها r يطلق عليها اسم **الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة.**

مثال 3

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $C(-2,3)$ ونصف قطرها 4 وحدات.

الحل

$$(\text{صيغة المركز}) \Rightarrow C(h, k) = C(-2,3) \Rightarrow \qquad \therefore \boxed{h = -2\ ,\ k = 3}\,, \qquad \boxed{r = 4}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

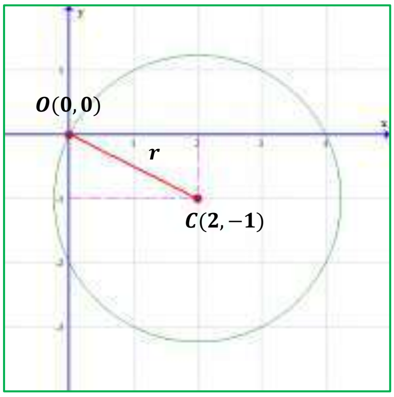
$$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \qquad \text{(معادلة الدائرة)}$$

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $C(2,-1)$ وتمر بنقطة الأصل $O(0,0)$.

الحل

$\because$ الدائرة تمر بنقطة الأصل فأن نصف القطر $r = \overline{CO}$ كما في الشكل (7-1)



الشكل (7-1)

$$\overline{CO} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$
$$= \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2}$$
$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\,units \quad \text{(نصف القطر)}$$

نعوض نصف القطر في معادلة الدائرة:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

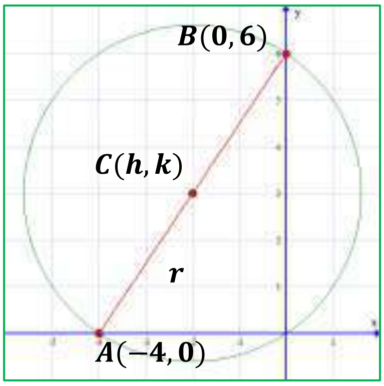
جد معادلة الدائرة التي نهايتي احد اقطارها النقطتان $B(0,6)$ و $A(-4,0)$.

الحل

لأن $\overline{AB}$ أحد الاقطار في الدائرة فإن C هي نقطة المنتصف

وكذلك المسافة بين أحد النقطتين والمركز تمثل نصف قطر الدائرة r ،

كما في الشكل (8-1):



الشكل (8-1)

$$C(h,k) = \underbrace{\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)}_{\text{قانون نقطة المنتصف للمستقيم}} = \left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$$
$$= (-2,3) \quad \text{(مركز الدائرة)}$$

نصف قطر الدائرة هو المسافة بين مركز الدائرة $(-2,3)$ واي نقطة على الدائرة (نختار أولى النقطتين $A(-4,0)$) :

$$\overline{CA} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-(-4))^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,units \quad \text{(نصف القطر)}$$

نعوض المركز ونصف القطر في معادلة الدائرة:

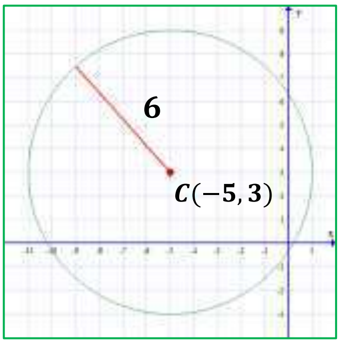
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13 \quad \text{(معادلة الدائرة)}$$

مثال 6

جد احداثيات المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x+5)^2+(y-3)^2=36$.

الحل

لإيجاد احداثيات نقطة المركز نحتاج لـ h و k ، ولايجاد نصف القطر نحتاج r ويمكننا استخراج هذه المجاهيل من معادلة الدائرة المعطاة بمقارنتها بقانون معادلة الدائرة :



الشكل (1-9)

$$(x+5)^2+(y-3)^2=36$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

(بمقارنة المعادلتين اعلاه) $\Longrightarrow h=-5\ ,\ k=3$

$\therefore C(h,k)=C(-5,3)$ (المركز)

$\because r^2=36 \quad \Longrightarrow r=6units$ (نصف القطر)

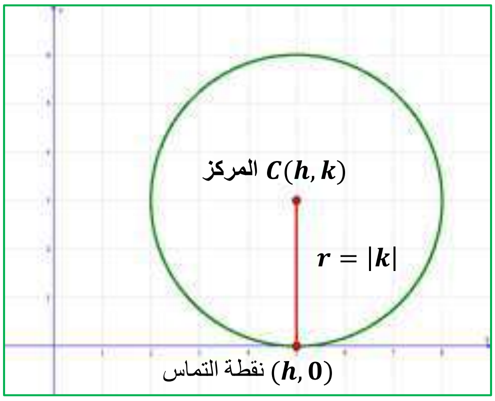
4.2.1. تماس الدائرة مع المحورين الاحداثيين

ويقصد بها الدائرة التي تمس أحد المحورين الاحداثيين او كلاهما:

أولاً: الدائرة التي تمس المحور x :- ويكون فيها $\boxed{r=|k|}$ ، و نقطة التماس مع محور x $\boxed{(h,0)}$ اما معادلة الدائرة تكون بالشكل ادناه:-

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=\underbrace{k^2=r^2}_{\text{نختار واحدة فقط}}}$$

وكما موضح في الشكل (1-10)



الشكل (1-10)

مثال 7

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(5,-3)$ وتمس المحور x ، ثم جد نقطة التماس.

الحل

($\because$ الدائرة تمس المحور x) $\Longrightarrow\ r=|k|=|-3|=3\ units$

(معادلة الدائرة التي تمسx) $\Longrightarrow\ (x-h)^2+(y-k)^2=k^2$

$$(x-5)^2+(y-(-3))^2=3^2$$

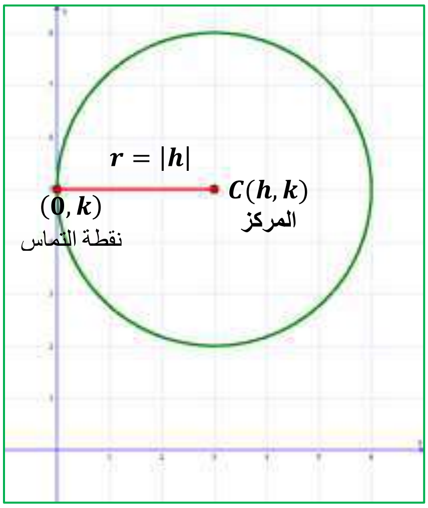
$$(x-5)^2+(y+3)^2=9$$

(نقطة التماس) $\Longrightarrow\ (h,0)=(5,0)$

ثانياً: الدائرة التي تمس المحور y :- ويكون فيها $\boxed{r = |h|}$ ، و نقطة التماس مع محور y $\boxed{(0, k)}$ اما معادلة الدائرة تكون بالشكل ادناه:-

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = \underbrace{h^2 = r^2}_{\text{نختار واحدة فقط}}}$$

وكما موضح في الشكل (1-11)



الشكل (1-11)

مثال 8

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-6,-2)$ وتمس المحور y ، ثم جد نقطة التماس.

الحل

$(\because$ الدائرة تمس المحور $y) \Longrightarrow \quad r = |h| = |-6| = 6\, units$

(معادلة الدائرة التي تمس x)$\Longrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$

$$(x-(-6))^2 + (y-(-2))^2 = 6^2$$

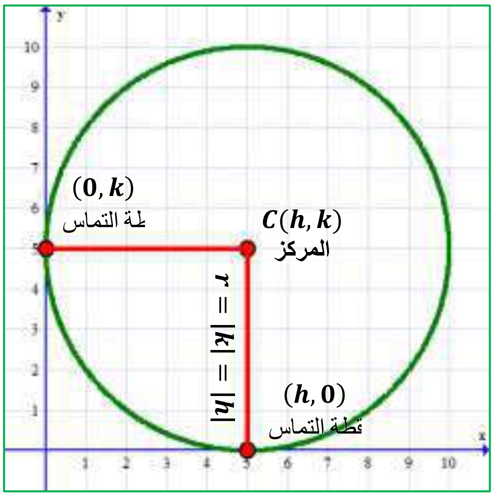
$$(x+6)^2 + (y+2)^2 = 36$$

(نقطة التماس)$\Longrightarrow \quad (0,k) = (0,-2)$

ثالثاً: الدائرة التي تمس المحورين معاً: - ويكون فيها $\boxed{r = |k| = |h|}$ ، ونقطتي تماس $\boxed{(0,k)\ ,\ (h,0)}$

اما معادلة الدائرة تكون بالشكل ادناه:-

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = \underbrace{k^2 = h^2 = r^2}_{\text{نختار واحدة فقط}}}$$



الشكل (1-12)

مثال 9

جد معادلة الدائرة التي مركزها $(-5,5)$ وتمس المحورين ، ثم جد نقطتي التماس.

الحل

(الدائرة تمس المحورين $\because$) $\Longrightarrow \; r = |k| = |h| = |-5| = |5| = 5\ units$

(معادلة الدائرة التي تمس المحورين) $\Longrightarrow \; (x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$

$$(x-(-5))^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

(نقطتي التماس) $\Longrightarrow \; (0,k)$ و $(h,0)$

$(0,5)$ و $(-5,0)$

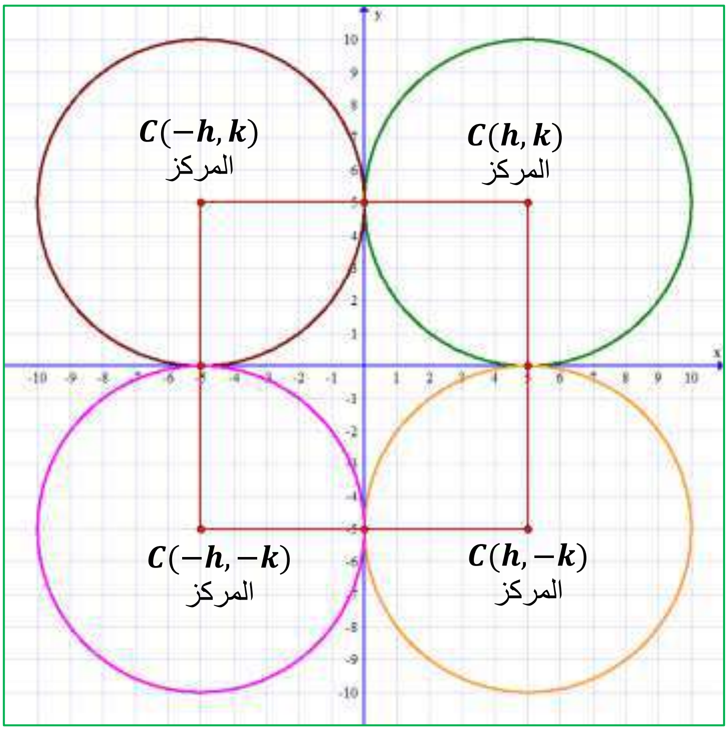
يوضح الشكل (13-1) جميع حالات تماس الدائرة مع المحورين والتي يكون نصف القطر $r = |k| = |h|$

في الربع الأول $\Longleftarrow \; \boxed{C(h,h) = C(k,k) = C(r,r)}$

في الربع الثاني $\Longleftarrow \; \boxed{C(-h,h) = C(-k,k) = C(-r,r)}$

في الربع الثالث $\Longleftarrow \; \boxed{C(-h,-h) = C(-k,-k) = C(-r,-r)}$

في الربع الرابع $\Longleftarrow \; \boxed{C(h,-h) = C(k,-k) = C(r,-r)}$



شكل (13-1)

مثال 10

جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتمر بالنقطة (2,4).

الحل

الدائرة تقع في الربع الأول لأنها تمس المحورين بالنقطة (2,4) (الاحداثيين يحملان إشارة موجبة)

فأن المركز يكون : $C(h,k) = C(r,r)$

(لان الدائرة تمر بالنقطة (2,4)) $\Rightarrow x = 2 \ , \ y = 4$

(النقطة تحقق معادلة الدائرة) $\Rightarrow (2-r)^2 + (4-r)^2 = r^2$

$$4 - 4r + r^2 + 16 - 8r + r^2 - r^2 = 0$$

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r-10)(r-2) = 0$$

$r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2$ أو $r - 10 = 0 \Rightarrow r = 10$ أما

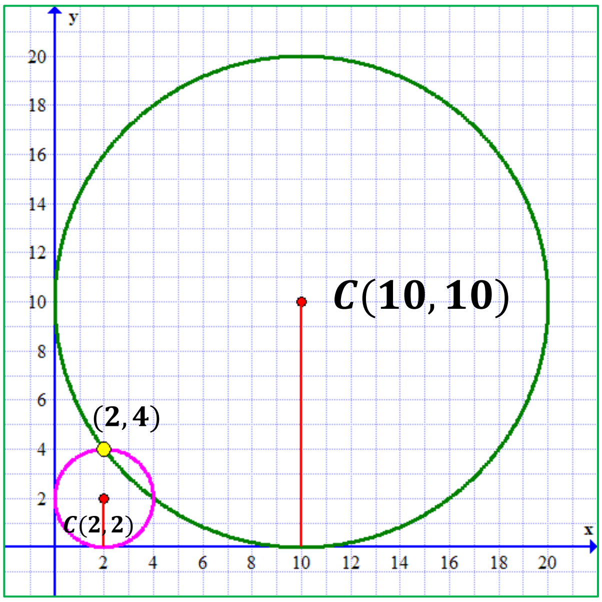
نلاحظ ظهور قيمتين لنصف القطر r وبالتالي تتكون لدينا معادلتي دائرتين تقعان دوائر تقع في الربع الأول:

(عندما $r = 10$)$\Longrightarrow (x-10)^2 + (y-10)^2 = 10^2$

$$(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$$

(عندما $r = 2$)$\Longrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$



الشكل (14-1)

ملاحظة1

اذا انتمت النقطة لاحد المحورين -أي وقعت عليهما- فأن احد احداثييها اما x او y يكون 0 ، فمثلا اذا وقعت النقطة على المحور y فانها ستكون بهذا الشكل: $(0,a)$ او $(0,-a)$ ، اما اذا وقعت على المحور x فان احداثييها يكونان بالشكل : $(a,0)$ او $(-a,0)$ ، حيث a هو ثابت.

مثال 11

جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي للمحور y وتمر بالنقطتين $P_2(-6,5)$, $P_1(2,-3)$.

الحل

$\because$ نقطة المركز تنتمي للمحور y فيكون شكلها $C(0,k)$

$$r = \overline{CP_1} = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$= \sqrt{(0-2)^2+(k-(-3))^2}$$

$$= \sqrt{4+(k+3)^2} \quad ......(1)$$ (لوجود مجهولين { r , k } نحتاج لتكوين معادلة اخرى)

$$r = \overline{CP_2} = \sqrt{(0-(-6))^2+(k-5)^2}$$

$$= \sqrt{36+(k-5)^2} ......(2)$$

نساوي المعادلتين :

$$\sqrt{4+(k+3)^2} = \sqrt{36+(k-5)^2}$$ (بتربيع الطرفين)

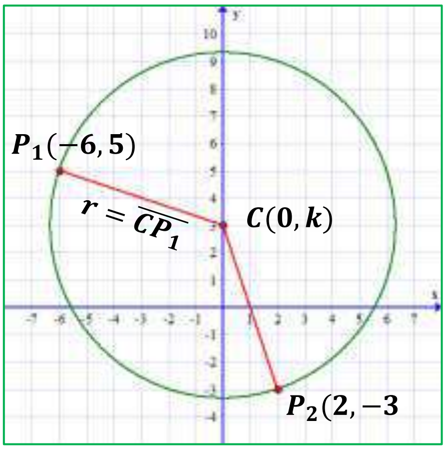
$$4+(k+3)^2 = 36+(k-5)^2$$ (مربع حدانية)

$$4+k^2+6k+9 = 36+k^2-10k+25$$

$$6k+10k = 61-13$$

$$16k = 48$$

$k = 3 \implies \therefore$ المركز $C(0,3)$



الشكل (1-15)

نعوض قيمة k في معادلة (1) او (2) للحصول على قيمة r:

$r = \sqrt{4+(3+3)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ نصف القطر

(معادلة الدائرة)$\implies (x-h)^2+(y-k)^2 = k^2$

$$(x-0)^2+(y-3)^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2$$

$$x^2+(y-3)^2 = 40$$

تمارين (1-2)

س1) استخرج معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها 8 وحدات ، ومركزها $(-3,3)$.

س2) استخرج معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(-3,4)$ ، ومركزها $(1,2)$.

س3) استخرج معادلة الدائرة التي نهايتا أحد اقطارها النقطتان $(-3,5)$, $(2,1)$.

س4) جد احداثيات المركز وطول نصف القطر للدائرة التي معادلتها $(x-4)^2+y^2=9$ ثم ارسمها.

س5) استخرج معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة $(-3,-2)$.

س6) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين معاً وطول نصف قطرها 4 وحدات وتقع في الربع الرابع.

س7) دائرة مركزها $C(2,a)$ ونصف قطرها 4وحدات ، وتمس المحور x ، جد قيمة a ومعادلة الدائرة.

س8) جد معادلة الدائرة التي مركزها ينتمي للمحور x ، وتمر بالنقطتين $(1,5),(3,-1)$.

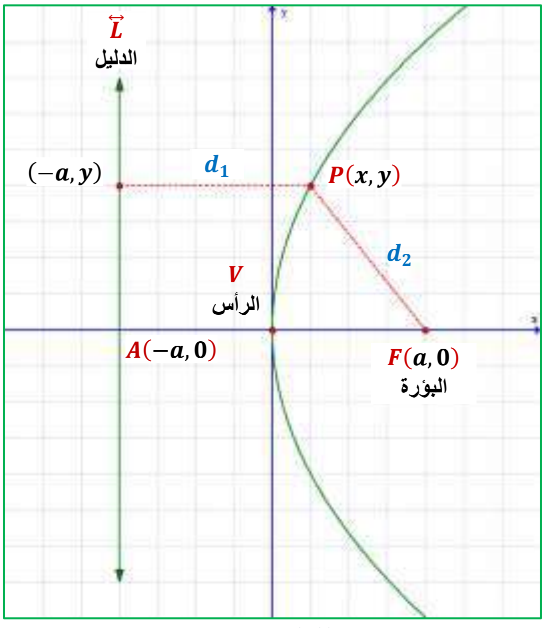
س9) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين معاً وتمر بالنقطة $(-3,6)$.

3.1.القطع المكافئ $(Parabola)$

1.3.1. تعريف

هو مجموعة كل النقاط في المستوي والتي يكون بُعدها عن نقطة معلومة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم ، *النقطة المعلومة* تسمى (بؤرة $Focus$) والمستقيم المعلوم يسمى (دليل $Direct$).

ليكن المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ دليلاً ولتكن النقطة $F(a,0)$ بؤرة القطع المكافئ كما في الشكل (1-16).



الشكل (1-16)

إن المستقيم $\overline{AF}$ المرسوم عمودياً من F على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ يسمى (محور القطع المكافئ) ، لتكن النقطة V النقطة المنصفة لقطعة المستقيم $\overline{AF}$ ، بما أن بعد V عن $\overleftrightarrow{L}$ يساوي بعدها عن F فان V نقطة واقعة على القطع المكافيء ، يطلق على النقطة V (راس القطع المكافئ) $(Vertix)$ والشكل يوضح ايضاً ان البؤرة تقع داخل القطع المكافئ وإن أي قطع مكافئ يقع على جهة واحدة من دليله وهي الجهة التي تقع البؤرة فيها.

واعتماداً على تعريف القطع المكافئ يمكن استخدام المساواة لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

2.3.1. معادلة القطع المكافئ

للقطع المكافئ حالات حسب مكان البؤرة :

أولا: معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يوازي المحور y

ليكن $F(a,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ وأن رأسه نقطة الأصل $O(0,0)$ ، ودليله يوازي المحور y والذي معادلته $x=-a$ ، ويكون محور تماثل القطع المكافئ هو x كما في الشكل (A 17-1) لنأخذ أي نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ ، ويكون المستقيم $\overline{PM}$ عمودياً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ وحسب تعريف القطع المكافئ:

$$\overline{PM}=\overline{PF}$$

وباستخدام قانون المسافة بين نقطتين: (_خطوات اشتقاق معادلة القطع المكافئ الآتية للطلاع فقط_)

$$\sqrt{(x+a)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2} \quad \text{(تربيع الطرفين)}$$

$$(x+a)^2=(x-a)^2+y^2 \quad \text{(مربع حدانية)}$$

$$x^2+2ax+a^2=x^2-2ax+a^2+y^2 \quad \text{(حذف المتشابه)}$$

$$2ax=-2ax+y^2$$

$$y^2=2ax+2ax$$

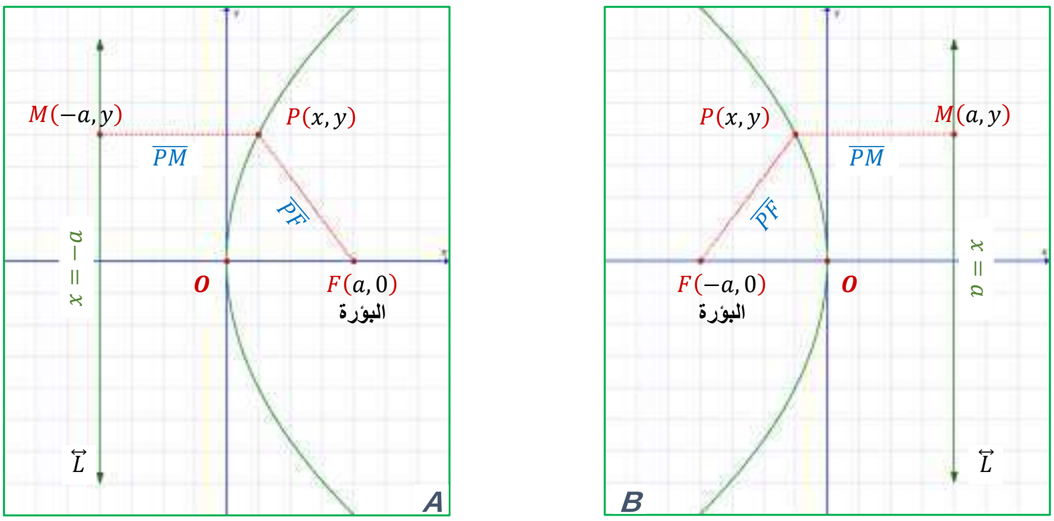
$$\boxed{y^2=4ax} \quad .....(1)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(a,0)$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$ ودليله $x=-a$ ورأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على الجزء الموجب من المحور x .

أما اذا اخذنا إشارة العدد الحقيقي a سالبة ، فأن جميع خطوات اشتقاق المعادلة (1) تبقى ذاتها ونحصل على المعادلة (2):

$$\boxed{y^2=-4ax} \quad .....(2)$$

وهي معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(-a,0)$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$ ودليله $x=a$ ورأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على الجزء السالب من المحور x . كما في الشكل (B 17-1).



الشكل (17-1)

ثانياً : معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ودليله يوازي المحور x

لنفرض أن $F(0,a)$ هي بؤرة القطع المكافئ وأن رأسه نقطة الأصل $O(0,0)$ ، ودليله يوازي المحور x والذي معادلته $y=-a$ ، ويكون محور تماثل القطع المكافئ هو المحور y ، وكما في الشكل (A 18-1) لنأخذ أي نقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ ، ويكون المستقيم $\overline{PM}$ عمودياً على الدليل $\overleftrightarrow{L}$ وحسب تعريف القطع المكافئ:

$$\overline{PM}=\overline{PF}$$

وباستخدام قانون المسافة بين نقطتين: (*<u>خطوات اشتقاق معادلة القطع المكافئ الآتية للاطلاع فقط</u>*)

$$\sqrt{(x-x)^2+(y+a)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-a)^2}$$

$$\sqrt{(y+a)^2}=\sqrt{x^2+(y-a)^2} \qquad \text{(تربيع الطرفين)}$$

$$(y+a)^2=x^2+(y-a)^2 \qquad \text{(مربع حدانية)}$$

$$y^2+2ay+a^2=x^2+y^2-2ay+a^2 \qquad \text{(حذف المتشابه)}$$

$$2ay=-2ay+x^2$$

$$x^2=2ay+2ay$$

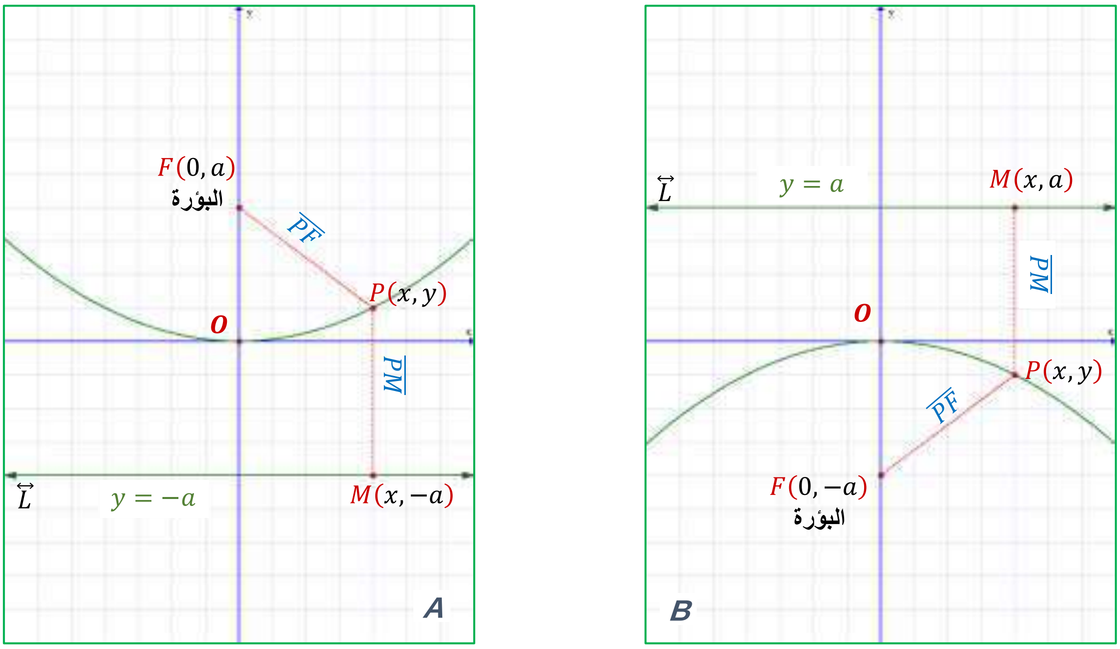
$$\boxed{x^2=4ay} \quad .....(1)$$

وهذه معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,a)$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$ ودليله $y=-a$ ورأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على الجزء الموجب من المحور y .

أما اذا اخذنا إشارة العدد الحقيقي a سالبة ، فأن جميع خطوات اشتقاق المعادلة (1) تبقى ذاتها ونحصل على المعادلة (2):

$$\boxed{x^2=-4ay} \quad .....(2)$$

وهذه معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,-a)$ حيث $a\in\mathbb{R}^+$ ودليله $y=a$ ورأسه نقطة الأصل ، ومحوره منطبق على المحور y وتقع بؤرته على الجزء السالب من المحور y وتكون فتحته نحو الأسفل. كما في الشكل (B 18-1).



الشكل (18-1)

ملاحظة21 لرسم قطع مكافئ – نكتفي برسم مستقيم الدليل وتحديد نقطة البؤرة F ، ومن ثم رسم منحني يحتوي البؤرة بداخله والذي يمثل منحني القطع المكافئ.

مثال 12

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(1,0)$ ورأسه نقطة الأصل ثم أرسمه.

الحل

$$\overline{PM} = \overline{PF}$$

حيث أن $P(x,y)$ ، $F(1,0)$ والدليل يكون $x=-1$ أي أن $M(-1,y)$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-y)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$$

$$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

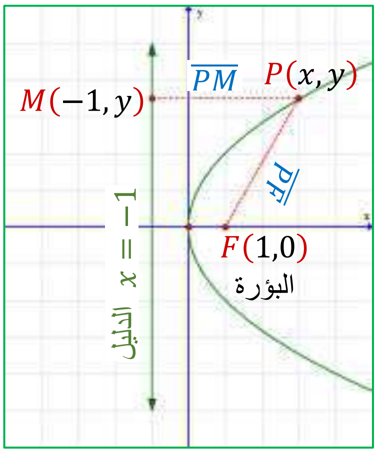
$$(x+1)^2 = (x-1)^2+y^2$$

$$x^2+2x+1 = x^2-2x+1+y^2$$

$$2x = -2x+y^2$$

$$y^2 = 2x+2x$$

$$y^2 = 4x$$



الشكل 1-19

مثال 13

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,3)$ ورأسه نقطة الأصل ثم أرسمه.

الحل

البؤرة $F(0,3)$ فتكون معادلة الدليل $y=-3$

نستنتج النقاط : $M(x,-3)\ ,\ P(x,y)\ ,\ F(0,3)$

$$\overline{PM} = \overline{PF}$$

$$\sqrt{(x-x)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}$$

$$\sqrt{(y+3)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

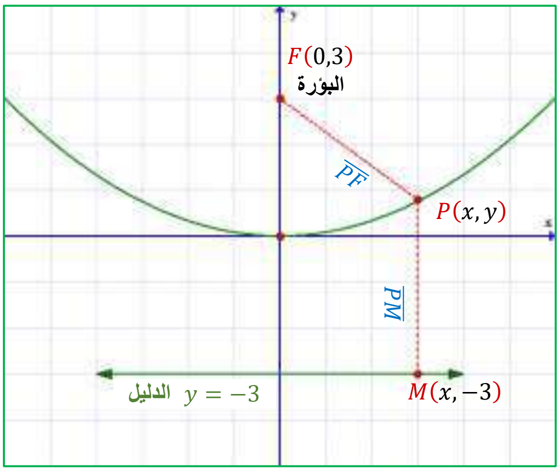
$$(y+3)^2 = x^2+(y-3)^2$$

$$y^2+6y+9 = x^2+y^2-6y+9$$

$$6y = x^2-6y$$

$$x^2 = 6y+6y$$

$$x^2 = 12y$$



الشكل (1-20)

ملاحظة3

- يمكننا استخراج قيمة a ومكان بؤرة القطع المكافئ مباشرة من احداثيات البؤرة.

مثلا: إذا كانت البؤرة $F(5,0)$ $\Longleftarrow$ فأن قيمة $a = 5$ ، ومكان البؤرة $\in$ لمحور x الموجب.

ومثلا: اذا كانت البؤرة $F(0,-3)$ $\Longleftarrow$ فأن قيمة $a = 3$ ، ومكان البؤرة $\in$ لمحور y السالب. وهكذا ...

علماً أن قيمة (a) تكون موجبة دائما لانها مسافة ولا تأخذ إشارة سالبة الا عند وجودها في احداثيات نقطة او معادلة دليل.

مثال 14

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-5,0)$ ، وجد معادلة دليله.

الحل

$\because$ البؤرة $F(-5,0)$ $\Longleftarrow$ $\therefore$ البؤرة $\in$ للجزء السالب من محور x ، فأن العلاقة :

$y^2 = -4ax$ (معادلة القطع)$\Rightarrow$

$y^2 = -4(5)x$ (نعوض قيمة $a = 5$)$\Rightarrow$

$y^2 = -20x$ (معادلة القطع المكافئ)

$x = a$ (معادلة الدليل)$\Rightarrow$

$x = 5$

استنتاج1

نستنتج أن المتغير في معادلة الدليل يحمل نفس رمز المحور الذي تنتمي له البؤرة (لأنه يقطعه) ، اما الثابت يحمل قيمة a وبإشارة معاكسه لأشارته في البؤرة.

فمثلا: إذا كانت البؤرة $\underbrace{F(2,0)}_{\in x \text{ للمحور}}$ $\Longleftarrow$ فأن معادلة الدليل تكون: $\underbrace{x}_{\text{نفس المحور}} = \underbrace{-2}_{a \text{ عكس إشارة}}$

مثال 15

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(0,\sqrt{2})$ ، وجد معادلة دليله.

الحل

$\because$ $F(0,\sqrt{2})$ البؤرة $\in$ للجزء الموجب من المحور y

فأن العلاقة :

$x^2 = 4ay$ (معادلة القطع)$\Rightarrow$

$x^2 = 4(\sqrt{2})y$ (نعوض قيمة $a = \sqrt{2}$)$\Rightarrow$

$x^2 = 4\sqrt{2}y$ (معادلة القطع المكافئ)

$y = -a$ (معادلة الدليل)$\Rightarrow$

$y = -\sqrt{2}$

ملاحظة4

يمكننا استخراج قيمة a من معادلة الدليل مباشرة عن طريق تبسيطه و وضعه بالشكل $\boxed{x = \mp a}$ او $\boxed{y = \mp a}$ حيث ان قيمة a تمثل الثابت الموجود في الطرف الأيمن من المعادلة بدون اشارته.

مثلا: اذا كانت معادلة الدليل بعد التبسيط $x = -4$ $\Leftarrow$ فأن قيمة $a = 4$

مثال 16

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $3x + 6 = 0$.

الحل

(تبسط معادلة الدليل لايجاد a)$\Rightarrow$ $\quad 3x + 6 = 0$

$3x = -6$

$x = -2 \qquad \Rightarrow a = 2$

من معادلة الدليل فأن البؤرة تقع على المحور x بالجزء الموجب

(معادلة القطع)$\Rightarrow$ $\quad y^2 = 4ax$

(نعوض قيمة $a = 2$) $\Rightarrow$ $\quad y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$ (معادلة القطع المكافئ)

مثال 17

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $3 - 2y = 0$.

الحل

(تبسط معادلة الدليل لايجاد a)$\Rightarrow$ $\quad 3 - 2y = 0$

$-2y = -3$

$y = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow a = \frac{-3}{2}$

من معادلة الدليل فأن البؤرة تقع على المحور y بالجزء السالب ، واحداثياتها $F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

(معادلة القطع)$\Rightarrow$ $\quad x^2 = -4ay$

(نعوض قيمة $a = \frac{3}{2}$) $\Rightarrow$ $\quad x^2 = -4(\frac{3}{2})y$

$x^2 = -6y$ (معادلة القطع المكافئ)

ملاحظة5

إذا مر الدليل بنقطة معطاة فيمكننا استخراج قيمة a منها بشكل مباشر ويحدد مكان البؤرة هذه القيمة.

مثلا: إذا مر دليل القطع المكافئ بالنقطة $(2, -5)$ وكانت البؤرة تنتمي لمحور x $\Leftarrow$ فأن قيمة $a = -2$

مثال

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على المحور x ويمر دليله بالنقطة $(-7,11)$.

الحل

∵ البؤرة تقع على المحور x والدليل يمر بالنقطة $(-7,11)$ $\Leftarrow$ $a = 7$

∵ البؤرة تقع على المحور x فأن معادلة الدليل:

$$x = -a$$

$$x = -7$$

وبالتالي فأن البؤرة : $F(7,0)$

$$y^2 = 4ax$$ $\Rightarrow$(معادلة القطع المكافئ)

$$y^2 = 4(7)x$$

$$y^2 = 28x$$ (معادلة القطع المكافئ)

ملاحظة6

- اذا توازى الدليل مع محوراً معيناً فأنه يقطع المحور الآخر والذي يمثل مكان بؤرة القطع.

مثلا: إذا توازى دليل القطع المكافئ مع محور x $\Leftarrow$ فأنه يقطع المحور y ، والبؤرة $\in$ لمحور y.

- اذا اردنا الحصول على قيمة a و كان المعطى نقطة يمر بها القطع المكافئ ، فأننا نعوض هذه النقطة في معادلة هذا القطع للحصول على قيمة a.

مثال 19

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-2,1)$ ودليله يوازي المحور y.

الحل

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2,1)$ فان بؤرته اما تنتمي لمحور x السالب او محور y الموجب

و ∵ الدليل يوزاي المحور y فأن البؤرة تنتمي للمحور x ومن المعلومة أعلاه فأن البؤرة تنتمي لمحور x السالب

فأن العلاقة هي:

$$y^2 = -4ax$$ $\Rightarrow$(معادلة القطع المكافئ)

$$(1)^2 = -4a(-2)$$ $\Rightarrow$(نعوض النقطة المارة بالقطع)

$$1 = 8a$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$y^2 = -4\left(\frac{1}{8}\right)x$$ $\Rightarrow$(نعوض قيمة a بالمعادلة)

$$y^2 = -\frac{1}{2}x$$ (معادلة القطع المكافئ)

مثال 20

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(7,4)$ ، $(-7,4)$.

الحل

$\because$ النقطتين متناظرتين حول الجزء الموجب من المحور y

$\therefore$ البؤرة تنتمي لهذا الجزء - محور y الموجب-

فأن العلاقة هي:

$x^2 = 4ay$ ⇐(معادلة القطع المكافئ)

$(-7)^2 = 4a(4)$ ⇐(نعوض أي من النقطتين في المعادلة)

$49 = 16a$

$a = \frac{49}{16}$

$x^2 = 4\left(\frac{49}{16}\right)y$ ⇐(نعوض قيمة a بالمعادلة)

$x^2 = \frac{49}{4}y$ (معادلة القطع المكافئ)

ملاحظة7

اذا اردنا الحصول على قيمة a و كان المعطى معادلة القطع المكافيء ، فأننا نقارن المعادلة المعطاة مع معادلة القطع الشبيهه للحصول على قيمة a.

مثال 21

جد احداثيي البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = -4\sqrt{5}y$ وأرسمه.

الحل

نقارن معادلة القطع المعطاة مع المعادلة الشبيهة للحصول على قيمة a

$x^2 = -4\sqrt{5}y$

$x^2 = -4ay$ ⇐(بالمقارنة مع الصيغة)

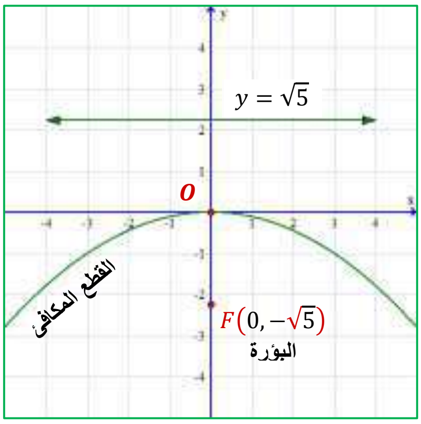
$-4a = -4\sqrt{5}$ ⇐(نحصل على)

$a = \sqrt{5}$

ومن شكل المعادلة نعرف ان البؤرة تنتمي لمحور y السالب:

$F(0,-a) \Rightarrow F(0,-\sqrt{5})$ ⇐(احداثيات البؤرة)

$y = a \Rightarrow y = \sqrt{5}$ ⇐(معادلة الدليل)



الشكل (21-1)

تمارين (1-3)

س1) جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها.

أ. البؤرة $(4,0)$ والرأس نقطة الأصل.

ب. البؤرة $\left(0,\sqrt{3}\right)$ والرأس نقطة الأصل.

ج. معادلة الدليل للقطع المكافئ $4y-3=0$ الذي رأسه نقطة الأصل.

س2) جد البؤرة والدليل للقطوع المكافئة الآتية ثم مثلها بيانياً:

a. $y^2=20x$

b. $x^2+16y=0$

c. $x^2=4y$

d. $2x+16y^2=0$

س3) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(2,-5),(-2,-5)$.

س4) اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس نقطة الأصل جد معادلته علماً أن بؤرته تنتمي للمحور x.

س5) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وتقع بؤرته على المحور x ويمر دليله بالنقطة $(2,-3)$.

س6) جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1,-4)$ ودليله يوازي المحور y.

س7) قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y=0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$ ، جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله وأرسم القطع.

4.1. القطع الناقص $(Ellipse)$

1.4.1. تعريف

القطع الناقص : هو مجموعة من النقاط في المستوي والتي يكون مجموع بعديهما عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت.

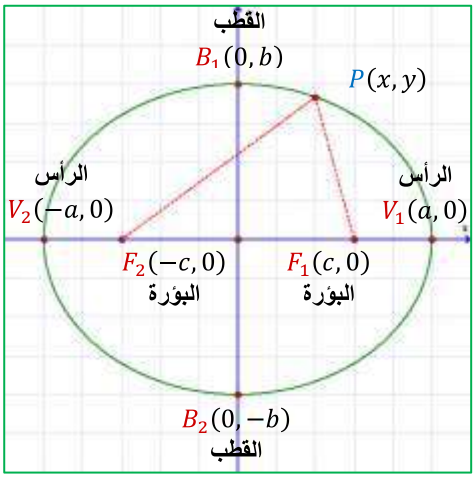
2.4.1. معادلة القطع الناقص

اولاً: معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

لتكن $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ ولتكن النقطتان $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ تمثلان بؤرتي القطع الناقص و $2a$ عدداً ثابتاً ، تسمى النقطة التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع الناقص $(Center)$ ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري $(Focal\ axis)$ ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسا القطع $V_1(a,0), V_2(-a,0)$ وتسمى قطعة المستقيم الواصل بين الرأسين بالمحور الكبير وطولها $(2a)$ وتساوي مجموع بعدي أي نقطة $P(x,y)$ من نقاط القطع على البؤرتين:

$$\boxed{PF_1 + PF_2 = 2a}$$

وأن النقطتان المعاكستان في الموقع للرأسين هما القطبان وتسمى قطعة المستقيم الواصل بين النقطتين $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ بالمحور الصغير وطولها $(2b)$ حيث $a > b > 0$ كما يظهر في الشكل (1-22). (خطوات اشتقاق معادلة القطع الناقص الآتية للاطلاع فقط)



الشكل (1-22)

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{(تربيع الطرفين)}$$

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2+2cx+c^2$$

$$4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 4a^2+4cx \quad \text{(بالقسمة على 4 وتربيع الطرفين)}$$

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4+2ca^2x+c^2x^2$$

$$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \quad ....(1)$$

بما أن $a > c$ فأن $a^2-c^2 > 0$ وبفرض $(b^2 = a^2-c^2)$ حيث $b > 0$

$$b^2 = a^2-c^2 \quad ....(2)$$

نعوض م(2) في م(1) $\Rightarrow\ x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \div (a^2b^2)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

وتسمى المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وتسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزي ويكون أقل من واحد ، أي: $\boxed{\frac{c}{a} < 1}$

ثانيا: معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل

بنفس خطوات الاشتقاق السابقة لمعادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وباستخدام التعريف نحصل على المعادلة كما في الشكل(24-1)

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

حيث البؤرتان على محور الصادات والمركز نقطة الأصل.

قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات

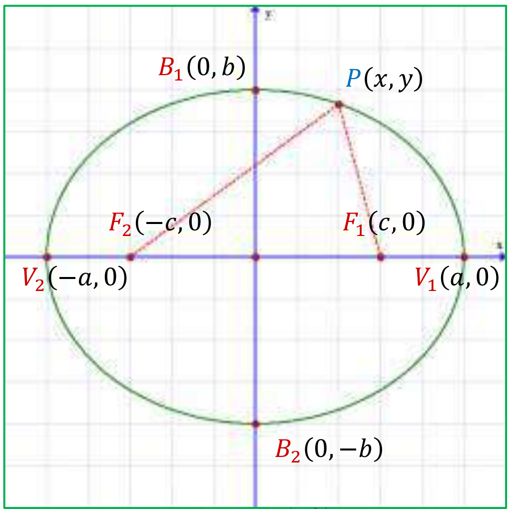
معادلة القطع : $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

البؤرتان: $\boxed{F_1(c,0), F_2(-c,0)}$

الرأسان: $\boxed{V_1(a,0), V_2(-a,0)}$

القطبان: $\boxed{B_1(0,b), B_2(0,-b)}$

انظر الشكل (1-23)



الشكل (1-23)

قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات

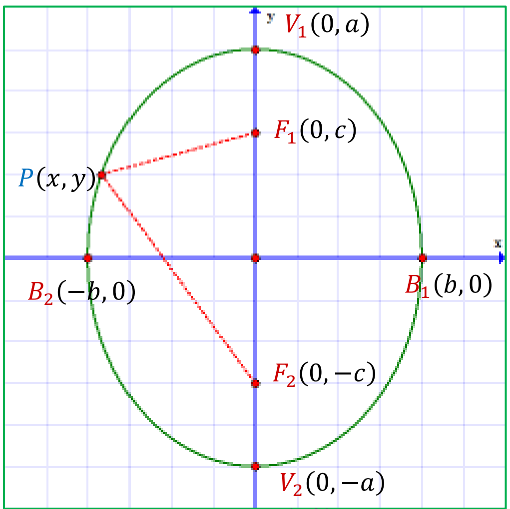
معادلة القطع : $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

البؤرتان: $\boxed{F_1(0,c), F_2(0,-c)}$

الرأسان: $\boxed{V_1(0,a), V_2(0,-a)}$

القطبان: $\boxed{B_1(b,0), B_2(-b,0)}$

انظر الشكل (1-24)



الشكل (1-24)

في القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقان على المحورين الاحداثيين:

1. طول المحور الكبير $\quad 2a$
2. طول المحور الصغير $\quad 2b$
3. المسافة بين البؤرتين $\quad 2c$
4. المتطابقة التي تربط بين a, b, c $\quad \boxed{c^2 = a^2 - b^2}$
5. $a > c \;,\; a > b$.
6. البؤرتان والرأسان دائماً على نفس المحور والقطبان على المحور المخالف للبؤرتان.
7. الاختلاف المركزي $\quad \boxed{e = \frac{c}{a}} < 1$
8. مساحة القطع الناقص $\quad \boxed{A = ab\pi}$
9. محيط القطع الناقص $\quad \boxed{P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$

مثال 22

قطع ناقص معادلته $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ جد احداثيات رأسيه وبؤرتيه والاختلاف المركزي.

الحل

من معادلة القطع الناقص يمكن استخراج قيمة $a\,,b$ حيث المقام الأكبر يمثل a^2 اما المقام الأصغر b^2:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$b^2 = 16 \quad \Rightarrow b = 4 \qquad a^2 = 25 \quad \Rightarrow a = 5 \qquad \Rightarrow(\text{استخراج قيمة } b \text{ و } a)$$

يمكننا إيجاد قيمة c من المتطابقة:

$$c^2 = a^2 - b^2 \;\Rightarrow\; c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad \Rightarrow(\text{إيجاد قيمة } c)$$

$$\Rightarrow c = 3$$

من شكل المعادلة نجد أن البؤرتين والرأسين ينتميان لمحور السينات:

$$V_1(a,0), V_2(-a,0) \quad \Rightarrow V_1(5,0), V_2(-5,0) \qquad \Rightarrow(\text{الرأسان})$$

$$F_1(c,0), F_2(-c,0) \quad \Rightarrow F_1(3,0), F_2(-3,0) \qquad \Rightarrow(\text{البؤرتان})$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} < 1 \qquad \Rightarrow(\text{الاختلاف المركزي})$$

استنتاجات2

- نستنتج انه يمكننا ان نجد قيمتي a و b مباشرة من معادلة القطع الناقص حيث أن المقام الأكبر يمثل a^2 والمقام الأصغر يمثل b^2.
- يمكننا تحديد مكان البؤرتين مباشرة من معادلة القطع الناقص حيث أن بسط المقام الأكبر a^2 يمثل مكان البؤرتين والرأسين اما بسط المقام الأصغر b^2 يمثل مكان القطبين.
- المتطابقة $(c^2 = a^2 - b^2)$ تمكننا من إيجاد أحد الثوابت الثلاثة $a\,,b\,,c$ إذا علم اثنان منهما.

مثال 23

قطع ناقص معادلته $25x^2 + 9y^2 = 225$ جد كل من البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والمسافة بين بؤرتيه والاختلاف المركزي والمساحة والمحيط.

الحل

قبل البدء بالحل يجب جعل المعادلة بالصيغة القياسية (أي نجعل الطرف الأيمن =1) لذا نقسم طرفي المعادلة على 225

$$(25x^2 + 9y^2 = 225) \div 225$$

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

(استخراج قيمة b و a)$\Rightarrow$ $a^2 = 25 \quad \Rightarrow a = 5 \qquad b^2 = 9 \quad \Rightarrow b = 3$

من شكل المعادلة نجد ان البؤرتان والرأسان $\in$ لمحور الصادات أما القطبان $\in$ لمحور السينات:

(الرأسان)$\Rightarrow$ $V_1(0, a), V_2(0, -a) \quad \Rightarrow V_1(0,5), V_2(0,-5)$

(القطبان)$\Rightarrow$ $B_1(b, 0), B_2(-b, 0) \quad \Rightarrow B_1(3,0), B_2(-3,0)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c)$\Rightarrow$ $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

(البؤرتان)$\Rightarrow$ $F_1(0, c), F_2(0, -c) \quad \Rightarrow F_1(0,4), F_2(0,-4)$

طول المحور الكبير $= 2a = 2(5) = 10$

طول المحور الصغير $= 2b = 2(3) = 6$

المسافة بين البؤرتين $= 2c = 2(4) = 8$

(الاختلاف المركزي)$\Rightarrow$ $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

(مساحة القطع الناقص)$\Rightarrow$ $A = ab\pi = 5 \times 3 \times \pi = 15\pi \ Units^2$

(محيط القطع الناقص)$\Rightarrow$ $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{25+9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\pi\sqrt{17} \ Units$$

ملاحظة8 : في القطع الناقص

- يمكننا استخراج قيمة a من احداثيات نقطة الرأس (حيث a تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).
- يمكننا استخراج قيمة b من احداثيات نقطة القطب (حيث b تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).
- يمكننا استخراج قيمة c من احداثيات نقطة البؤرة (حيث c تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).

علماً أن جميع الثوابت أعلاه (a , b , c) تكون مجردة من الإشارة.

مثال 24

قطع ناقص بؤرتاه $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ واحداثيي رأساه $V_1(6,0), V_2(-6,0)$ جد معادلته.

الحل

$\because$ البؤرتان $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ يقعان على المحور السينات $\Leftarrow$ $\therefore$ معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(من احداثيات البؤرتين نستخرج c) $\Rightarrow c = 3 \quad \Rightarrow c^2 = 9$

$\because$ الرأسان $F_1(6,0), F_2(-6,0)$

(من احداثيات الرأسين نستخرج a) $\Rightarrow a = 6 \quad \Rightarrow a^2 = 36$

من العلاقة المساعدة نجد قيمة b:

(إيجاد قيمة b) $\Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \quad 9 = 36 - b^2$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 36 - 9 = 27$$

نعوض قيمة b^2 و a^2 في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

مثال 25

قطع ناقص قطباه $B_1(2,0), B_2(-2,0)$ وطول محوره الكبير (18) وحدة جد معادلته.

الحل

$\because$ القطبان يقعان على محور السينات $\Leftarrow$ البؤرتان يخالفان ويقعان على محور الصادات:

(معادلة القطع الناقص) $\Rightarrow \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

(من احداثيات القطبان نستخرج b) $\Rightarrow b = 2 \quad \Rightarrow b^2 = 4$

من طول المحور الكبير نستخرج a:

(نستخرج a) $\Rightarrow$ طول المحور الكبير $= 2a$

$$18 = 2a \quad \Rightarrow a = 9 \quad \Rightarrow a^2 = 81$$

نعوض قيمة b^2 و a^2 في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{81} = 1$$

استنتاج3

لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج لمعرفة مكان البؤرتين و قيمتي الثوابت a و b.

مثال

جد معادلة القطع الناقص الذي يقطع من المحور y جزءاً طوله (20) وحدة ومن المحور x جزءاً طوله (10) وحدة.

الحل

$\because$ الجزء الأكبر مقطوع من المحور y فهو يمثل المحور الكبير ومكان البؤرتان فأن الجزء المقطوع الصغير يمثل المحور الصغير.

من طول المحور الكبير نستخرج a:

$$2a = \text{طول المحور الكبير} \Rightarrow (\text{نستخرج } a)$$

$$20 = 2a$$

$$a = 10 \quad \Rightarrow a^2 = 100$$

من طول المحور الصغير نستخرج b:

$$2b = \text{طول المحور الصغير} \Rightarrow (\text{نستخرج } b)$$

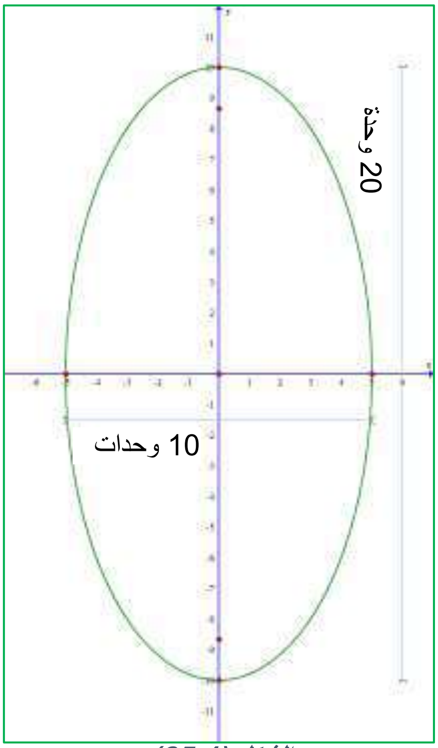
$$10 = 2b$$

$$b = 5 \quad \Rightarrow b^2 = 25$$

نعوض قيمة b^2 و a^2 في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1}$$



الشكل (1-25)

مثال 27

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه (6) وحدات والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

الحل

من المسافة بين البؤرتين نستخرج قيمة c:

$$2c = \text{المسافة بين البؤرتين} \Rightarrow (\text{نستخرج } c)$$

$$6 = 2c$$

$$c = 3 \quad \Rightarrow c^2 = 9$$

من الفرق بين طولي القطع نكون معادلة:

$$2 = \text{طول المحور الصغير} - \text{طول المحور الكبير}$$

$$(2a - 2b = 2) \div 2$$

$$a - b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1 + b \ldots (1)$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \ldots (2)$$ (من العلاقة المساعدة نكون معادلة اخرى)

نعوض م(1) في م(2) ونعوض كذلك قيمة c^2

$$9 = (1+b)^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad 9 = 1 + 2b + b^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad 9 = 1 + 2b$$

$$\Rightarrow \quad b = 4 \qquad \Rightarrow \quad b^2 = 16$$

نعوض قيمة b في م(1)

$$a = 1 + 4 = 5 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25$$

نعوض قيمة b^2 , a^2 في معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه ينتميان لمحور السينات::

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

مثال 28

لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة القطع الناقص مركزه في نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$ ، جد قيمة $k \in \mathbb{R}$.

الحل

جعل المعادلة بالصيغة القياسية بقسمة طرفي المعادلة على 36 :

$$(kx^2 + 4y^2 = 36) \div 36$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

البؤرة $(\sqrt{3}, 0)$ تقع على محور السينات ومنها نستخرج قيمة c:

(نستخرج c) $\qquad \Rightarrow c = \sqrt{3} \quad \Rightarrow c^2 = 3$

نستخرج قيمة b^2 , a^2 من معادلة القطع الناقص

∵ البؤرتان على محور السينات فان a^2 هي مقام x^2 و b^2 هي مقام y^2 :

$$\therefore \quad a^2 = \frac{36}{k} \quad , \qquad b^2 = 9 \quad , \qquad c^2 = 3$$

(نعوض بالعلاقة المساعدة) $\qquad \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow 3 = \frac{36}{k} - 9 \quad \Rightarrow k = 3$

3.4.1. رسم القطع الناقص

لـــرسم القطع الناقص نتبع ما يلي:

1. نجد من المعادلة قيمة a حتى نحدد الرأسين وقيمة b حتى نحدد القطبين.
2. نعين كل من القطبين والرأسين على المحورين الاحداثيين ونوصل بينهم على الترتيب بمنحني متصل.
3. نجد من العلاقة المساعدة قيمة c حتى نحدد البؤرتين ثم نعينهما على المستوى الاحداثي.

مثال 29

ارسم القطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$

الحل

جعل المعادلة بالصيغة القياسية بقسمة طرفي المعادلة على 36 :

$$(4x^2 + 9y^2 = 36) \div 36$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(استخراج قيمة b و a) $\Rightarrow \quad a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = 3, \qquad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

من شكل المعادلة : البؤرتان و الرأسان $\ni$ لمحور السينات أما القطبان $\ni$ لمحور الصادات:

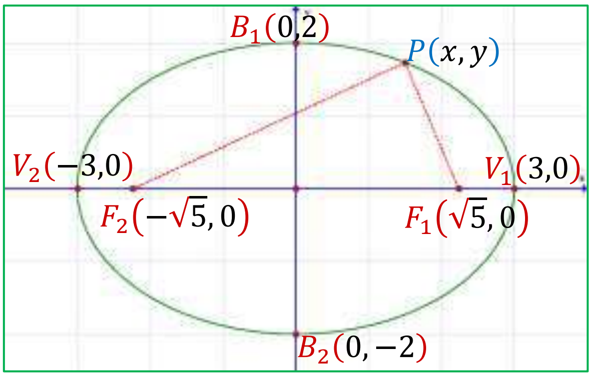
(الرأسان) $\Rightarrow \quad V_1(a,0), V_2(-a,0) \quad \Rightarrow V_1(3,0), V_2(-3,0)$

(القطبان) $\Rightarrow \quad B_1(0,b), B_2(0,-b) \quad \Rightarrow B_1(0,2), B_2(0,-2)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c) $\Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \quad c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \quad c = \sqrt{5}$

(البؤرتان) $\Rightarrow \quad F_1(c,0), F_2(-c,0) \quad \Rightarrow F_1(\sqrt{5},0), F_2(-\sqrt{5},0)$



الشكل (1-26)

مثال 30

ارسم القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$:

الحل

(استخراج قيمة b و a) $\Rightarrow \quad a^2 = 36 \quad \Rightarrow a = 6, \qquad b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$

من شكل المعادلة : البؤرتان و الرأسان $\ni$ لمحور الصادات أما القطبان $\ni$ لمحور السينات:

(الرأسان) $\Rightarrow \quad V_1(0,a), V_2(0,-a) \quad \Rightarrow V_1(0,6), V_2(0,-6)$

(القطبان) $\Rightarrow \quad B_1(b,0), B_2(-b,0) \quad \Rightarrow B_1(5,0), B_2(-5,0)$

لإيجاد القطبين نحتاج قيمة الثابت c :

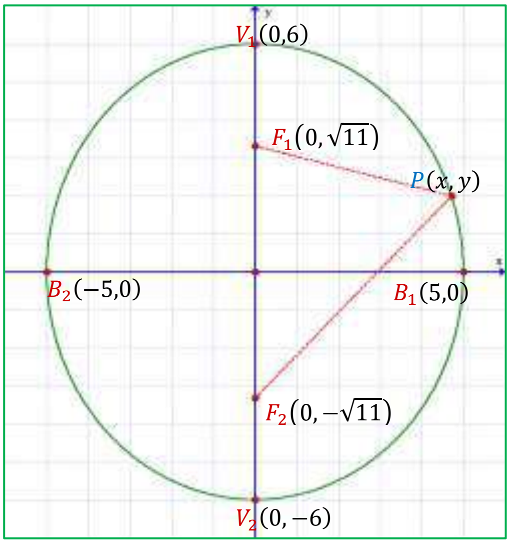
(إيجاد قيمة c)$\Rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2$

$\Rightarrow \quad c^2 = 36 - 25 = 11$

$\Rightarrow \quad c = \sqrt{11}$

(البؤرتان)$\Rightarrow \quad F_1(0, c), F_2(0, -c)$

$\Rightarrow \quad F_1(0, \sqrt{11}), F_2(0, -\sqrt{11})$



الشكل (1-27)

تمارين (1-4)

س1) عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين ثم جد طول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين والاختلاف المركزي ثم استخرج المساحة والمحيط للقطوع الناقصة التي معادلتها مبينة في كل مما يأتي:

a. $25x^2 + 16y^2 = 400$

b. $3x^2 + 5y^2 = 15$

س2) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(5,0), F_2(-5,0)$ وطول محوره الكبير (12) وحدة.

س3) جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 و 5 وحدة على الترتيب وبؤرتيه على محور السينات.

س4) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الصغير ينطبق على y ويساوي 6 وحدات ويمر بالنقطة $(5,0)$ ثم ارسمه.

س5) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتمي للمحور y وطول محوره الكبير 6 وحدات والبعد بين بؤرتيه 4 وحدات.

س6)ارسم القطع الناقص الذي معادلته $6x^2 + 4y^2 = 24$.

س7) جد معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير 12 وحدة طول.

5.1.القطع الزائد

1.5.1. تعريف

القطع الزائد هو مجموعة النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منهما عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً.

حيث أن العدد الثابت $2a$ يمثل طول المحور الحقيقي والنقاط الموجودة في القطع الزائد الأساسية هي بؤرتان F_1 , F_2 ورأسان V_1 , V_2 وقطبان B_1 , B_2.

وحسب تعريف القطع الزائد - أي نقطة $P(x,y)$ على القطع الزائد الذي البؤرتان F_1 , F_2 فأن:

$$\boxed{|PF_1 - PF_2| = 2a}$$

حيث إن PF_1 , PF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من النقطة P والمسافة F_1 , F_2هي البعد بين البؤرتين ، أما المحور العمود على المحور الحقيقي والمار بالمركز هو طول المحور المرافق (التخيلي) $2b$.

2.5.1. معادلة القطع الزائد

أولا: معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل

من تعريف القطع الزائد الذي ذكرناه سابقاً يمكن اشتقاق معادلة القطع الزائد انظر الشكل (1-28) وكما يلي:-

(*خطوات اشتقاق معادلة القطع الزائد الآتية للاطلاع فقط*)

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \qquad P(x,y)\,,\ F_1(c,0)\ ,\ F_2(-c,0)$$

$$PF_1 - PF_2 = \mp 2a$$ (تعويض النقاط بقانون المسافة بين نقطتين)

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \mp 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \mp 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$ (الطرفين تربيع)

$$-4a^2 - 4cx = \mp 4a\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}$$ (بالقسمة على 4- وتربيع الطرفين)

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad ....(1)$$

بما أن $c > a$, $c > a > 0$ فأن $a^2 - c^2 < 0$ وبفرض $(b^2 = c^2 - a^2)$ حيث $b > 0$:

$$a^2 - c^2 = -b^2 \quad ....(2)$$

نعوض م(2) في م(1) ثم نقسم على $(-a^2b^2)$ فأن معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات: كما في الشكل (1-28)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

وبالتالي فأن:

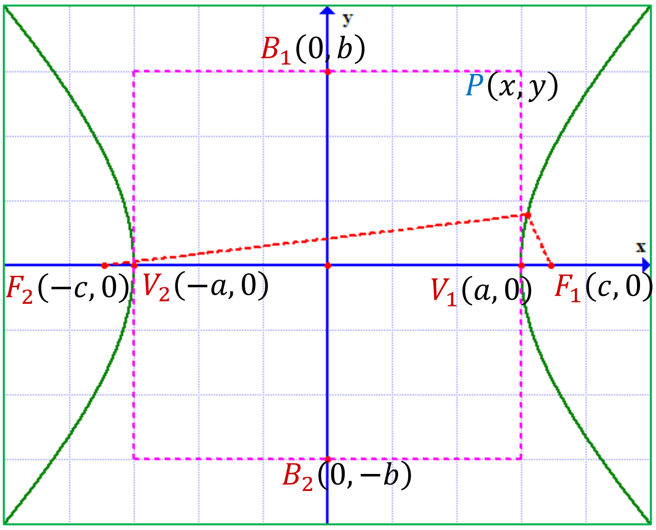
القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات

معادلة القطع : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

البؤرتان: $F_1(c,0), F_2(-c,0)$

الرأسان: $V_1(a,0), V_2(-a,0)$

القطبان: $B_1(0,b), B_2(0,-b)$



الشكل (1-28)

ثانياً: معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل

اذا كانت البؤرتان F_1, F_2 على محور الصادات ، ومحور السينات هو العمود عليهما كما في الشكل(1-29)

ومعتمداً على تعريف القطع الزائد فأن المعادلة القياسية للقطع الزائد:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

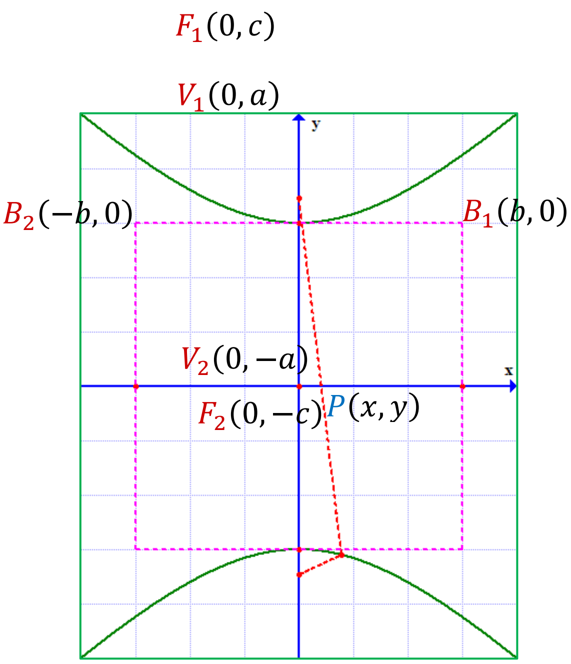
القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات

معادلة القطع : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

البؤرتان: $F_1(0,c), F_2(0,-c)$

الرأسان: $V_1(0,a), V_2(0,-a)$

القطبان: $B_1(b,0), B_2(-b,0)$



الشكل (1-29)

في القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومحوريه منطبقان على المحورين الاحداثيين:

1. طول المحور الحقيقي $\mathbf{2a}$
2. طول المحور المرافق (التخيلي) $\mathbf{2b}$
3. المسافة بين البؤرتين $\mathbf{2c}$
4. المتطابقة التي تربط بين $\mathbf{a, b, c}$ $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
5. $\mathbf{a < c}$ دائما ويمكن أن يكون $\mathbf{a = b}$ أو $\mathbf{a > b}$ أو $\mathbf{a < b}$
6. البؤرتان والرأسان دائماً على نفس المحور بينما القطبان على المحور المخالف للبؤرتين.
7. الاختلاف المركزي $\boxed{e = \frac{c}{a}} > 1$

قطع زائد معادلته $9y^2 - 9x^2 = 81$ جد احداثيات راسيه وبؤرتيه وقطبيه وطول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين.

مثال 31

يجب جعل المعادلة بالصيغة القياسية (أي نجعل الطرف الأيمن =1) لذا نقسم طرفي المعادلة على 81

$$(9y^2 - 9x^2 = 81) \div 81$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 1$$

(استخراج قيمة b و a)$\Rightarrow$ $a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = 3$

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow b = 3$

من شكل المعادلة نجد ان البؤرتان والرأسان $\in$ لمحور الصادات أما القطبان $\in$ لمحور السينات:

(الرأسان)$\Rightarrow$ $V_1(0, a), V_2(0, -a) \quad \Rightarrow V_1(0,3), V_2(0,-3)$

(القطبان)$\Rightarrow$ $B_1(b, 0), B_2(-b, 0) \quad \Rightarrow B_1(3,0), B_2(-3,0)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c)$\Rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow c^2 = 9 + 9 = 18 \quad \Rightarrow c = 3\sqrt{2}$

(البؤرتان)$\Rightarrow$ $F_1(0, c), F_2(0, -c) \quad \Rightarrow F_1(0, 3\sqrt{2}), F_2(0, -3\sqrt{2})$

طول المحور الحقيقي $= 2a = 2(3) = 6$

طول المحور المرافق $= 2b = 2(3) = 6$

المسافة بين البؤرتين $= 2c = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

(الاختلاف المركزي)$\Rightarrow$ $e = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} > 1$

في المثال السابق قيمتي الثوابت a و b متساويتين ويسمى هذا النوع من القطوع بالقطع الزائد القائم لان النقاط تشكل مربع واختلاف ثابت $(\sqrt{2})$.

استنتاج4

في المثال أعلاه عن القطع الزائد نلاحظ أن:

- ان قيمتي الثوابت a و b بالإمكان أن تتساويان أو أن تكون احداهما أكبر من الاخرى.
- اول مقام في معادلة القطع الزائد يمثل a^2 دائماً ، اما ثاني مقام فيمثل b^2.
- أول بسط في معادلة القطع الزائد يمثل مكان انتماء البؤرتين والرأسين أما ثاني بسط فيمثل مكان القطبين.

مثال

جد احداثيات البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $12x^2 - 4y^2 = 48$.

الحل

جعل المعادلة بالصيغة القياسية :

$$(12x^2 - 4y^2 = 48) \div 48$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

(استخراج قيمة b و a)⇐ $\qquad a^2 = 4 \quad \Rightarrow a = 2 , \quad b^2 = 12 \quad \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$

البؤرتان والرأسان $\in$ لمحور السينات

(الرأسان)⇐ $\qquad V_1(a,0), V_2(-a,0) \quad \Rightarrow V_1(2,0), V_2(-2,0)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c)⇐ $\qquad c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 4 + 12 = 16 \quad c = 4$

(البؤرتان)⇐ $\qquad F_1(0,c), F_2(0,-c) \quad \Rightarrow F_1(4,0), F_2(-4,0)$

طول المحور الحقيقي $= 2a = 2(2) = 4$

طول المحور المرافق $= 2b = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

(الاختلاف المركزي)⇐ $\qquad e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$

ملاحظة9: القطع الزائد كمَثل القطع الناقص فيهِ:

- يمكننا استخراج قيمة a من احداثيات نقطة الرأس (حيث a تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).
- يمكننا استخراج قيمة b من احداثيات نقطة القطب (حيث b تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).
- يمكننا استخراج قيمة c من احداثيات نقطة البؤرة (حيث c تمثل القيمة الغير صفرية في الاحداثيات).

علماً أن جميع الثوابت أعلاه (a , b , c) تكون مجردة من الإشارة.

مثال 33

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ورأساه $V_1(10,0), V_2(-10,0)$ وبؤرتاه هما $F_1(18,0), F_2(-18,0)$.

الحل

(من الرأسين نستخرج a) $\Rightarrow a = 10 \quad \Rightarrow a^2 = 100$

(من البؤرتين نستخرج c) $\Rightarrow c = 18 \quad \Rightarrow c^2 = 324$

(إيجاد قيمة b) $\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 324 = 100 + b^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 324 - 100 = 224$

∵ البؤرتان يقعان على المحور السينات فان معادلة القطع الزائد:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{224} = 1$$

مثال 34

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل طول محوره الحقيقي (6) وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات.

الحل

من طول المحور الحقيقي نستخرج a:

(نستخرج a) $\Rightarrow$ طول المحور الحقيقي $= 2a$

$2a = 6 \quad \Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow a^2 = 9$

الاختلاف المركزي $= \frac{c}{a}$

$2 = \frac{c}{3} \quad \Rightarrow c = 6 \quad \Rightarrow c^2 = 36$

التعويض بالعلاقة المساعدة لإيجاد b:

(إيجاد قيمة b) $\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 36 = 9 + b^2$

$b^2 = 27$

(معادلة القطع الزائد) $\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$$

3.5.1. رسم القطع الزائد

لـــرسم القطع الزائد نتبع ما يلي:

1. نجد من المعادلة قيمة a ومنه نجد الرأسين V_1 , V_2 وقيمة b ومنه نجد القطبين B_1 , B_2 ، ثم نعينهما على المحورين الاحداثيين.
2. نكون مستطيلاً من النقاط أعلاه ، أضلاعه توازي المحورين الاحداثيين.
3. نرسم قطر المستطيل منهما ويمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحنى القطع الزائد.
4. من العلاقة المساعدة نجد قيمة c ومنه البؤرتين F_1 , F_2 ، ثم نرسم منحني ذراعيّ القطع الزائد يمران بالرأس ولا يمسان قطري المستطيل.

مثال 35

ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل

(استخراج قيمة b و a) $\Rightarrow \quad a^2 = 64 \quad \Rightarrow a = 8 , \qquad b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$

البؤرتان والرأسان $\in$ لمحور السينات أما القطبان $\in$ لمحور الصادات:

(الرأسان) $\Rightarrow \quad V_1(a,0), V_2(-a,0) \quad \Rightarrow V_1(8,0), V_2(-8,0)$

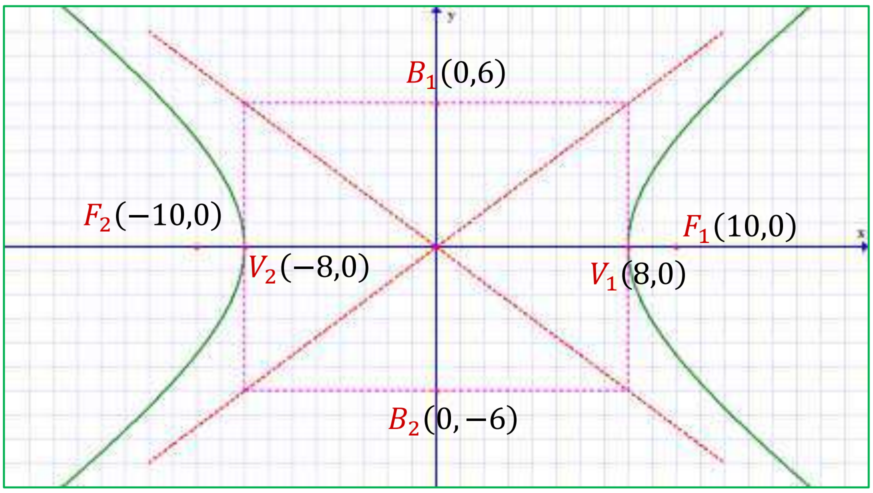
(القطبان) $\Rightarrow \quad B_1(0,b), B_2(0,-b) \quad \Rightarrow B_1(0,6), B_2(0,-6)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c) $\Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \quad c^2 = 64 + 36 = 100 \quad \Rightarrow \quad c = 10$

(البؤرتان) $\Rightarrow \quad F_1(c,0), F_2(-c,0) \quad \Rightarrow \quad F_1(10,0), F_2(-10,0)$

كما موضح في الشكل (1-30)



الشكل (1-30)

مثال 36

ارسم القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$

الحل

(استخراج قيمة b و a)$\Rightarrow$ $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2\,, \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

البؤرتان والرأسان ∋ لمحور الصادات أما القطبان ∋ لمحور السينات:

(الرأسان)$\Rightarrow$ $V_1(0,a), V_2(0,-a) \Rightarrow V_1(0,2), V_2(0,-2)$

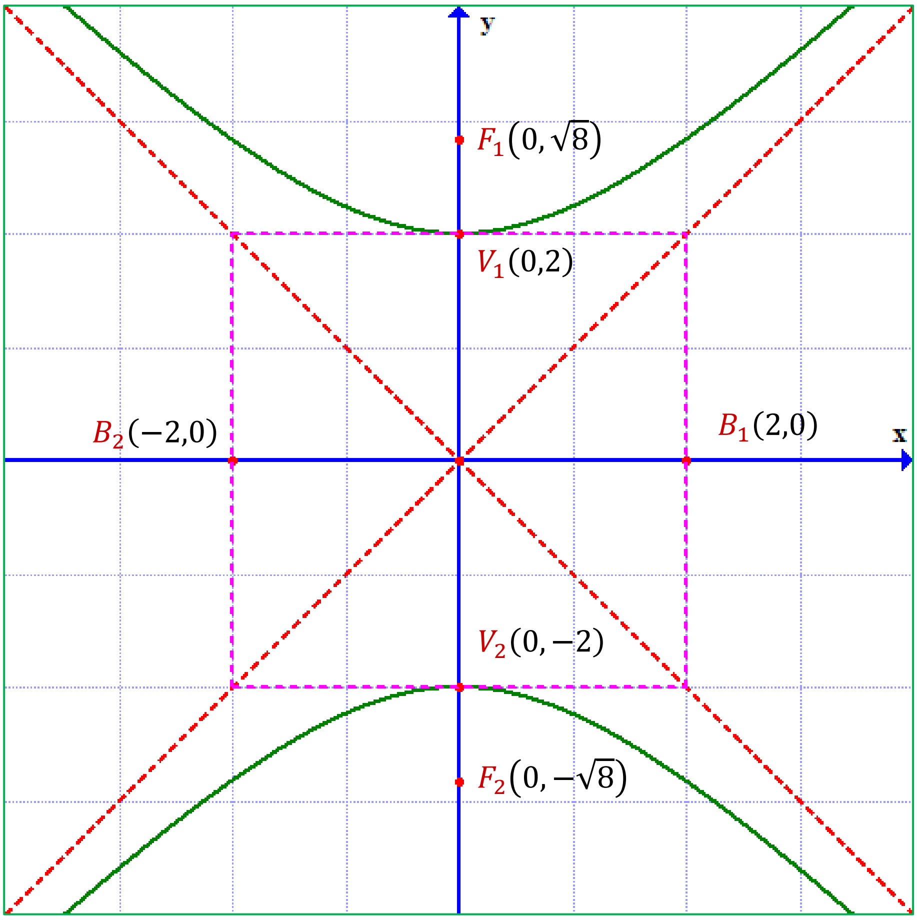
(القطبان)$\Rightarrow$ $B_1(b,0), B_2(-b,0) \Rightarrow B_1(2,0), B_2(-2,0)$

لإيجاد البؤرتين نحتاج قيمة الثابت c :

(إيجاد قيمة c)$\Rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow c = \sqrt{8}$

(البؤرتان)$\Rightarrow$ $F_1(0,c), F_2(0,-c) \Rightarrow F_1(0,\sqrt{8}), F_2(0,-\sqrt{8})$

كما موضح في الشكل (1-31)



الشكل (1-31)

تمارين (1-5)

س1) عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين وطول كل من المحورين والمسافة بين البؤرتين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الآتية:

a. $16x^2 - 9y^2 = 144.$

b. $7y^2 - 4x^2 = 28.$

c. $8x^2 - 8y^2 = 16.$

d. $9y^2 - 9x^2 = 1.$

س2) جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي (12) وحدة واحداثيي بؤرتيه $F_1(0,10), F_2(0,-10)$.

س3) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه $F_1(2\sqrt{2},0)$, $F_2(-2\sqrt{2},0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات.

س4) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على المحور x والمسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات وطول محوره الحقيقي يساوي طول محوره المرافق.

س5) قطع زائد مركزه نقطة الأصل واحداثيي رأساه $V_1(6,0)$, $V_2(-6,0)$ وطول محوره المرافق يساوي (12) وحدة ، جد معادلته القياسية.

س6)اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 و 1 وحدات وعلى الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

س7) ارسم كل من القطوع الزائدة الآتية:

a. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1.$

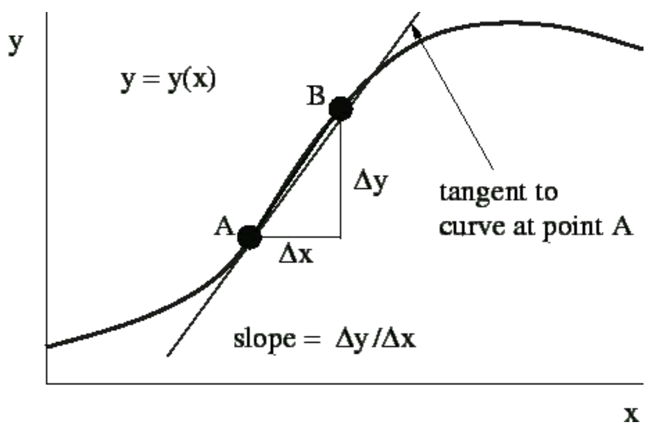
b. $9y^2 - 25x^2 = 225.$

الفصل الثاني
(المشتقة)
DIFFERENTIATION

البنود

الأهداف السلوكية

- يستذكر الطالب المعلومات التي تعلمها في الصف الثاني فيما يخص قواعد الاشتقاق.
- يتعرف الطالب على مفهوم النقاط الحرجة للدالة ومناطق تزايدها وتناقصها ويتمكن من تحديد نوع النقطة من خلال فحص إشارة المشتقة الأولى على خط الاعداد.
- يتعرف الطالب على مفهوم نقطة الانقلاب للدالة ومفهوم تقعر وتحدب المنحني باستخدام أسلوب فحص إشارة المشتقة الثانية على خط الاعداد.
- يتعرف الطالب على الخطوات اللازمة اتباعها لرسم بيان الدوال الكثيرة الحدود ويتمكن من اظهار الرسم على الورقة البياني باستخدام المعلومات التي حصل عليها من الخطوات السابقة.
- يتمكن الطالب من استخدام ما تعلمه في موضوع النهايات في حل المسائل العلمية المتعلقة بها.



الفصل الثاني - المشتقة - *Differentiation*

1.2.مراجعة عامة في قواعد أيجاد المشتقة

درسنا في السنة السابقة القواعد الأساسية في المشتقة ، وسنتطرق في بداية هذا الفصل الى مراجعة تلك القواعد:-

قاعدة 1) مشتقة الدالة الثابتة = صفر $\quad f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

مثال 1

الرمز (′) في الأعلى يعبر عن المشتقة

1. $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = -\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) = 0$

قاعدة 2) مشتقة الدالة بالصيغة x^n: $\quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

مثال 2

1. $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
2. $f(x) = x^6 \Rightarrow f'(x) = 6x^5$
3. $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

قاعدة 3) مشتقة الدالة بالصيغة $\underbrace{a}_{\text{ثابت}}\, x^n$: $\quad f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = \underbrace{a \times n}_{\text{ضرب الاس بالثابت}}\; x^{n-1}$

مثال 3

1. $f(x) = 5x^4 \Rightarrow f'(x) = 5 \times 4x^3 = 20x^3$
2. $f(x) = 3x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -6x^{-3}$

قاعدة 4) مشتقة مجموع وفرق دالتين: {نشتق كل حد من الحدود حسب قاعدته}

مثال 4

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 1$$
$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 5$$

قاعدة 5) مشتقة حاصل ضرب دالتين:

(مشتقة الاولى) × (الثانية) + (مشتقة الثانية) × (الاولى) = (مشتقة حاصل ضرب دالتين)

مثال 5

$$f(x) = (x^2 + 1)(3x^2 - 2)$$
$$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 1).6x + (3x^2 - 2).2x$$

قاعدة 6) مشتقة حاصل قسمة دالتين:

$$\text{(مشتقة الدالة الكسرية)} = \frac{\text{(مشتقة المقام)} \times \text{(البسط)} - \text{(مشتقة البسط)} \times \text{(المقام)}}{\text{(المقام)}^2}$$

مثال 6

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(x^2+2).3x^2 - (x^3-1).2x}{(x^2+2)^2}$$

قاعدة 7) قاعدة الرفع لدالة:

$$y = \underbrace{(f(x))^n}_{\text{دالة مرفوعة لقوة}} \quad \Rightarrow \quad y' = \underbrace{n(f(x))^{n-1}}_{\text{مشتقة قوة القوس}} \times \underbrace{f'(x)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

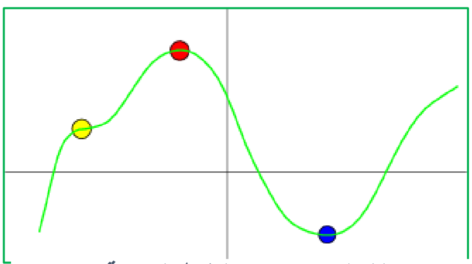
مثال 7

$$f(x) = (x^3 + 3x + 2)^5$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{5(x^3+3x+2)^4}_{\text{مشتقة خارج القوس(داخل القوس بدون اشتقاق)}} \times \underbrace{(3x^2+3)}_{\text{مشتقة داخل القوس}}$$

2.2. النقاط الحرجة للدالة

النقطة الحرجة للدالة المعرفة على الفترة المفتوحة: هي النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق أو المشتقة عندها تساوي صفرا.



الشكل (2-1) – النقاط الحرجة

لإيجاد النقاط الحرجة نتبع الخطوات التالية:

1. نشتق الدالة الاصلية في السؤال $f(x)$.
2. نصفر المشتقة (نساوي المشتقة بالصفر) ونكون معادلة.
3. نحل المعادلة الناتجة ونجد قيم x.
4. نعوض قيم x في الدالة الاصلية $f(x)$ ، والقيم الناتجة تمثل قيم y.
5. النقاط الناتجة المتمثلة بقيم (x, y) تمثل النقاط الحرجة.

مثال 8

جد النقاط الحرجة للدالة . $f(x) = x^2 - 2x + 3$

الحل

$f'(x) = 2x - 2$ نشتق الدالة

$2x - 2 = 0$ نساوي الدالة بالصفر

$2x = 2 \Rightarrow x = 1$

$y = f(1) = 1^2 - 2(1) + 3$ نعوض قيم x في الدالة الاصلية لإيجاد قيمة y

$= 1 - 2 + 3 = 2$

∴ احداثيات النقطة الحرجة هي: $(1,2)$

مثال 9

جد النقاط الحرجة للدالة . $f(x) = x^3 - 3x + 6$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ قيمتين لـ(x) لذا نعوض مرتين بالدالة

$y_1 = f(1) = (1)^3 - 3(1) + 6$

$= 1 - 3 + 6 = 4$

$y_2 = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 6$

$= -1 + 3 + 6 = 8$

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(1,4)$و $(-1,8)$

3.2. مناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى بأستخدام المشتقة الأولى

1.3.2. تعريف

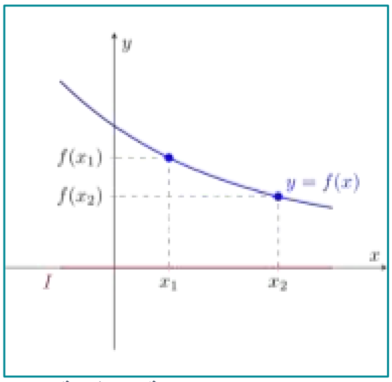
لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة I فيقال أن :-

1. الدالة $f(x)$ (متزايدة - $Increasing$) على الفترة المفتوحة I إذا كان:

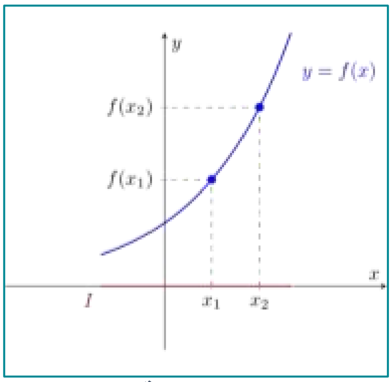
$$\Longrightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$$

2. الدالة $f(x)$ (متناقصة - $decreasing$) على الفترة المفتوحة I اذا كان:

$$\Longrightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$$



الشكل (2-2) – دالة متناقصة



الشكل (2-3) – دالة متزايدة

لإيجاد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة (النهايات العظمى والصغرى) نتبع الخطوات التالية:

1. نشتق الدالة $f(x)$ في السؤال .
2. نصفر المشتقة ونكون معادلة ثم نحل المعادلة الناتجة ونجد قيم x.
3. نجد النقاط الحرجة (بتعويض قيم x في الدالة الأصلية).
4. نعين قيم x على خط الأعداد ونعمل أختبار الإشارات ، بتعويض قيم نختارها من مناطق - اقل واكثر من قيم x - في مشتقة الدالة الاولى:-
   i. إذا كانت إشارة الناتج موجبة + تعني منطقة تزايد. نرسم عندها على خط الاعداد اشارت موجبة وسهم متجه نحو الأعلى (↗) من اليسار الى اليمين.
   ii. إذا كانت إشارة الناتج سالبة - تعني منطقة تناقص. نرسم عندها على خط الاعداد اشارت سالبة وسهم متجه نحو الأسفل(↘) من اليسار الى اليمين.
5. تسمى النقطة الحرجة:
   i. نهاية عظمى محلية : اذا كانت قيمة x محصورة بين منطقتي بدأ من اليسار تزايد وتناقص (↗ ↘).
   ii. نهاية صغرى محلية : اذا كانت قيمة x محصورة بين منطقتي بدأ من اليسار تناقص وتزايد (↘ ↗).
   iii. نقطة حرجة فقط : اذا كانت قيمة x محصورة بين منطقتي تزايد (↗ ↗) او منطقتي تناقص(↘ ↘).

جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد والتناقص للدالة . $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

الحل

نشتق الدالة

$$f'(x) = 9 + 6x - 3x^2$$

نساوي المشتقة بالصفر

$$(9 + 6x - 3x^2 = 0) \div 3$$

$$(3 + 2x - x^2 = 0) \times (-1)$$

نجد قيم x

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ أما

$$y_1 = f(3) = 9(3) + 3(3)^2 - (3)^3$$

$$= 27 + 27 - 27 = 27$$

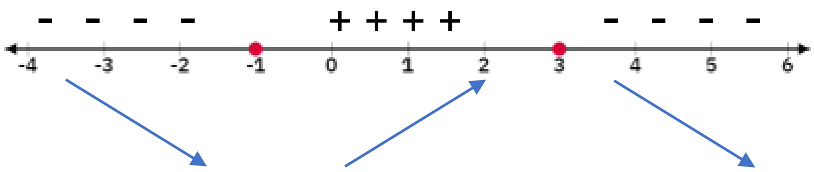
نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$$y_2 = f(-1) = 9(-1) + 3(-1)^2 - (-1)^3$$

$$= -9 + 3 + 1 = -5$$

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(-1,-5)$ و $(3,27)$

إشارة $f'(x)$



(نختار نقاط ضمن الفترات لاختبار المنطقة ونعوضها بالمشتقة الأولى) مثلاً: $\{-2 , 0 , -15\}$

$f'(4) = 9 + 6(4) - 3(4)^2$ $= -15$ (إشارة المنطقة الوسطى سالبة)	$f'(0) = 9 + 6(0) - 3(0)^2$ $= +9$ (إشارة المنطقة الوسطى موجبة)	$f'(-2) = 9 + 6(-2) - 3(-2)^2$ $= -15$ (إشارة المنطقة الأولى سالبة)

نختبر إشارات المناطق

∴ مناطق التزايد هي الفترة المفتوحة: $(-1,3)$

مناطق التناقص هي: $\{x : x > 3\}$, $\{x : x < -1\}$

مثال 11

جد مناطق التزايد والتناقص للدالة . $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$

الحل

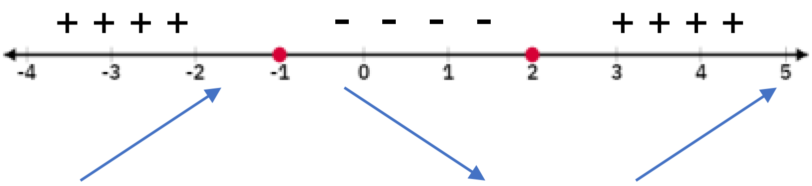
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$(6x^2 - 6x - 12 = 0) \div 6$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

إشارة $f'(x)$



$f'(-2) = 6(-2)^2 - 6(-2) - 12$ $= +24$ (إشارة المنطقة الأولى موجبة)	$f'(0) = 6(0)^2 - 6(0) - 12$ $= -12$ (إشارة المنطقة الوسطى سالبة)	$f'(3) = 6(3)^2 - 6(3) - 12$ $= +24$ (إشارة المنطقة الوسطى موجبة)

∴ مناطق التزايد هي: $\{x : x < -1\}, \{x : x > 2\}$

مناطق التناقص هي الفترة المفتوحة: $(-1,2)$

ملاحظة1

في المثال السابق لم نستخرج النقاط الحرجة والنهايات العظمى والصغرى وذلك لأنه لم يطلبها منا في السؤال

مثال 12

جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$$

الحل

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$

$$(6x^2 - 18x - 24 = 0) \div 6$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

أما $x - 4 = 0 \quad \Rightarrow x = 4$ أو $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -1$

$$y_1 = f(4) = 2(4)^3 - 9(4)^2 - 24(4) - 12$$

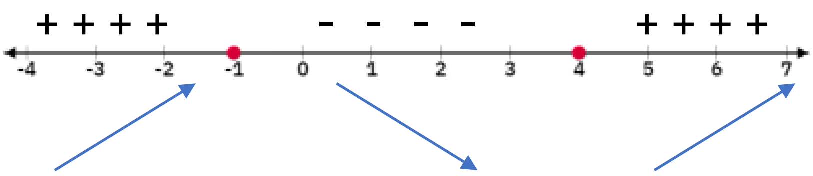
$$= 128 - 144 - 96 - 12 = -124$$

$$y_2 = f(-1) = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 24(-1) - 12$$

$$= -2 - 9 + 24 - 12 = 1$$

$\therefore$ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(4,-124)$ و $(-1,1)$

إشارة $f'(x)$



$f'(-2) = 6(-2)^2 - 18(-2) - 24$

$= +36$

(إشارة المنطقة الأولى موجبة)

$f'(0) = 6(0)^2 - 18(0) - 24$

$= -24$

(إشارة المنطقة الوسطى سالبة)

$f'(5) = 6(5)^2 - 18(5) - 24$

$= +36$

(إشارة المنطقة الوسطى موجبة)

$\therefore$ مناطق التزايد هي: $\{x : x < -1\}, \{x : x > 4\}$

مناطق التناقص هي الفترة المفتوحة: $(-1,4)$

$\therefore$ النقطة $(-1,1)$ تمثل نهاية عظمى محلية

النقطة $(4,-124)$ تمثل نهاية صغرى محلية

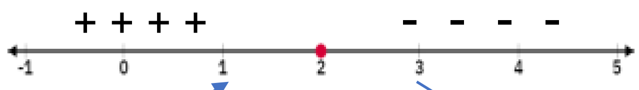
جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = 1 - (x-2)^2$

الحل

$$f'(x) = -2(x-2).1$$
$$= -2x + 4$$
$$-2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow x = 2$$
$$y = f(2) = 1 - (2-2)^2$$
$$= 1$$

∴ احداثيات النقطة الحرجة هي: $(2,1)$

إشارة $f'(x)$



$f'(0) = -2(0) + 4$
$= +4$
(إشارة المنطقة الأولى موجبة)

$f'(3) = -2(3) + 4$
$= -2$
(إشارة المنطقة الثانية سالبة)

∴ مناطق التزايد هي: $\{x : x < 2\}$

مناطق التناقص هي: $\{x : x > 2\}$

∴ النقطة $(2,1)$ تمثل نهاية عظمى محلية

جد نقاط النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص للدالة $f(x) = x^4 - 4x^3$

الحل

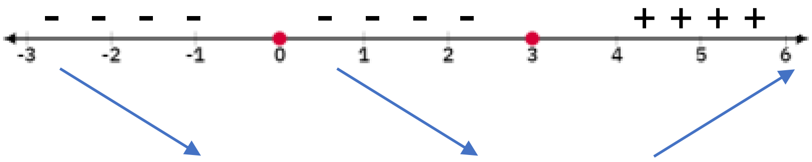
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$
$$(4x^3 - 12x^2 = 0) \div 4$$
$$x^3 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2(x-3) = 0$$

أما $x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$ أو $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$

$$y_1 = f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 = 0$$
$$y_2 = f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = 81 - 108 = -27$$

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(3,-27)$ و $(0,0)$

إشارة $f'(x)$



∴ مناطق التزايد هي: $\{x : x > 3\}$

مناطق التناقص هي: $\{x : x < 0\}$ والفترة المفتوحة $(0,3)$

∴ النقطة $(0,0)$ مجرد نقطة حرجة ولا تمثل نقطة نهاية عظمى ولا نهاية صغرى للدالة

النقطة $(3,-27)$ تمثل نهاية صغرى محلية

تمارين (2-1)

سؤال1) جد النقاط الحرجة والنهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص لكل من الدوال الأتية:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$
2. $f(x) = x^4 - 4x^3$
3. $f(x) = 5 + 4x^3 - x^4$
4. $f(x) = x^2 - 4x + 1$
5. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
6. $f(x) = x - 4x^3$
7. $f(x) = (2 - x)^3$

اختبار المشتقة الثانية لفحص النهايات العظمى والصغرى

ويمكن ذلك بواسطة الخطوات الاتية:

خطوات اختبار المشتقة الثانية لفحص النهايات العظمى والصغرى

1. نشتق الدالة $f(x)$ في السؤال.
2. نصفر المشتقة الاولى ثم نحل المعادلة الناتجة ونجد قيم x.
3. نجد النقاط الحرجة (بتعويض قيم x في الدالة الأصلية).
4. نشتق الدالة مرة ثانية $\Leftarrow$ $f''(x)$:-

حالة أولى: المشتقة (متغير): نصفر المشتقة ونجد قيم x ، ثم نعينها على خط الأعداد ونعمل اختبار الإشارات ، بتعويض قيم نختارها من مناطق - اقل واكثر من قيم x - في مشتقة الدالة الثانية:

i. اذا كانت إشارة الناتج موجبة + يعني منطقة تقعر . نرسم عندها على خط الاعداد اشارات موجبة ومنحني متجه نحو الأعلى (∪).

ii. اذا كانت إشارة الناتج سالبة - يعني منطقة تحدب. نرسم عندها على خط الاعداد اشارات سالبة ومنحني متجه نحو الأسفل (∩).

iii. اذا كان الناتج يساوي 0 يعني الاختبار فاشل.

حالة ثانية: المشتقة (ثابت):

i. إشارة الثابت موجبة + يعني المنحني مقعر ويمتلك نهاية صغرى.

ii. إشارة الثابت سالبة - يعني المنحني محدب ويمتلك نهاية عظمى.

مثال 15

باستخدام المشتقة الثانية جد النهاية وبين نوعها للدالة $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

الحل

$$f'(x) = 6 - 6x$$

$$6 - 6x = 0 \quad \Rightarrow 6x = 6 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$y = f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1$$

$$= 2$$

∴ $(1,2)$ تمثل نقطة حرجة

$$f''(x) = -6$$

∵ المشتقة الثانية دالة ثابتة والإشارة سالبة

∴ المنحني في حالة تحدب والدالة تمتلك نهاية عظمى $\Leftarrow$ $(1,2)$ نهاية عظمى محلية

مثال 16

باستخدام المشتقة الثانية جد النهاية ونوعها للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$(3x^2 - 6x = 0) \div 3 \quad \Rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(x-2) = 0$

أما $x = 0$ أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y_1 = f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 9 = -9$

$y_2 = f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 - 9 = -13$

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(2,-13)$ و $(0,-9)$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = 6(0) - 6 = -6$

∵ الإشارة سالبة ⟸ الدالة في حالة تحدب ⟸ النقطة $(0,-9)$ نهاية عظمى محلية

$f''(2) = 6(2) - 6 = 6$

∵ الإشارة موجبة ⟸ الدالة في حالة تقعر ⟸ النقطة $(2,-13)$ نهاية صغرى محلية

مثال 17

باستخدام المشتقة الثانية جد النهاية ونوعها للدالة $f(x) = 4 - (x+1)^4$

الحل

$f'(x) = -4(x+1)^3$

$(-4\ (x+1)^3 = 0) \div -4 \quad \Rightarrow (x+1)^3 = 0$ (بجذر الطرفين تكعيبياً)

$\Rightarrow x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -1$

$y = f(-1) = 4 - ((-1)+1)^4 = 4$

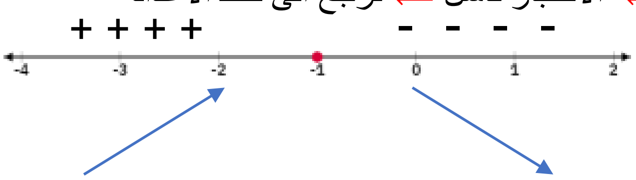
∴ احداثيات النقطة الحرجة هي: $(-1,4)$

$f''(x) = -12(x+1)^2$

$f''(-1) = -12((-1)+1)^2 = 0$

∵ الناتج $= 0$ ⟸ الاختبار فاشل ⟸ نرجع الى خط الاعداد

إشارة $f'(x)$



$f'(-2) = -4\,(-2+1)^3 = +4$

$f'(0) = -4\,(0+1)^3 = -4$

∴ النقطة $(-1,4)$ نهاية عظمى محلية

4.2. مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب باستخدام المشتقة الثانية

1.4.2 تعريف

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $I=(a,b)$ فأن :-

1. يقال ان الدالة $f(x)$ (مقعرة - $Concave$) على الفترة I اذا كان:

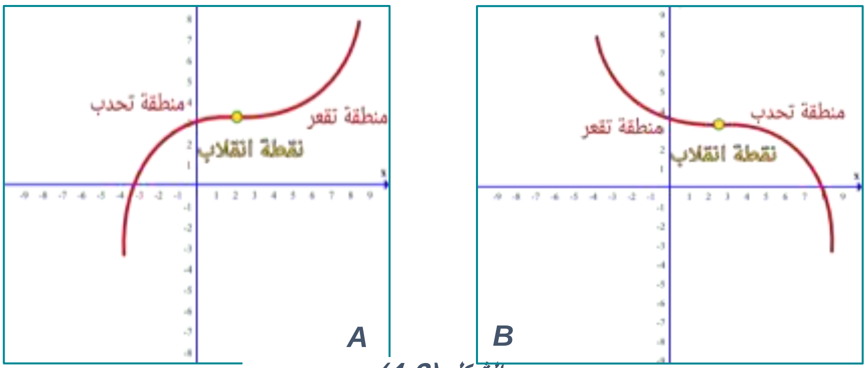
$$f''(x)>0 \implies \forall x \in (a,b)$$

2. يقال ان الدالة $f(x)$ (محدبة - $Convex$) على الفترة $I=(a,b)$ اذا كان:

$$f''(x)<0 \implies \forall x \in (a,b)$$

2.4.2. تعريف

نقطة الانقلاب: هي نقطة تنتمي الى منحنى الدالة ويتغير عندها شكل المنحنى من حالة التحدب الى حالة التقعر او بالعكس. وكما في الشكل(4-2)



الشكل (4-2)

لإيجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نتبع الخطوات التالية:

1. نشتق الدالة $f(x)$ في السؤال مرتين $\Longleftarrow f''(x)$.
2. نصفر المشتقة الثانية ثم نحل المعادلة الناتجة ونجد قيم x.
3. نجد النقاط المرشحة (بتعويض قيم x في الدالة الأصلية).
4. نعين قيم x على خط الأعداد ونعمل أختبار الإشارات على $f''(x)$، بتعويض قيم نختارها من مناطق - اقل واكثر من قيم x - في مشتقة الثانية:
   i. اذا كانت إشارة الناتج موجبة + يعني منطقة تقعر . نرسم عندها على خط الاعداد اشارات موجبة ومنحني متجه نحو الأعلى ($\cup$).
   ii. اذا كانت إشارة الناتج سالبة - يعني منطقة تحدب . نرسم عندها على خط الاعداد اشارات سالبة ومنحني متجه نحو الأسفل ($\cap$).
5. تسمى النقطة المرشحة:
   i. نقطة انقلاب: اذا كانت محصورة بين منطقتي تقعر وتحدب ($\cap \ \cup$) او بالعكس ($\cup \ \cap$).
   ii. لا تمثل انقلاب: اذا كانت محصورة بين منطقتي تقعر ($\cup \ \cup$) او بين منطقتي تحدب ($\cap \ \cap$).

مثال 18

جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الحل

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

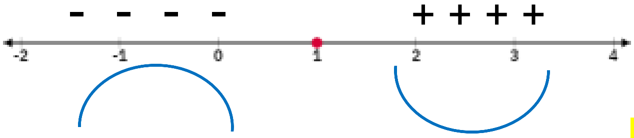
$(6x - 6 = 0) \div 6 \quad \Rightarrow x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$y = f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

∴ احداثيات نقطة الانقلاب المرشحة: $(1, -1)$

إشارة $f''(x)$



∴ مناطق التقعر: $\{x : x > 1\}$

مناطق التحدب: $\{x : x < 1\}$

∴ النقطة $(1, -1)$ تمثل نقطة انقلاب

مثال 19

جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب للدالة $f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

$(24x - 12x^2 = 0) \div 12 \quad \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x(2 - x) = 0$

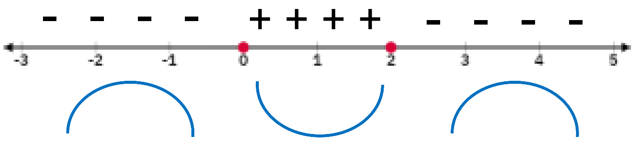
أما $x = 0$ أو $2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$y_1 = f(0) = 4(0)^3 - (0)^4 = 0$

$y_2 = f(2) = 4(2)^3 - (2)^4 = 16$

∴ احداثيات نقاط الانقلاب المرشحة: $(2,16)$ و $(0,0)$

إشارة $f''(x)$



$f''(-1) = 24(-1) - 12(-1)^2 = -36$	$f''(1) = 24(1) - 12(1)^2 = +12$	$f''(3) = 24(3) - 12(3)^2 = -36$

∴ مناطق التقعر: $(0,2)$

مناطق التحدب: $\{x : x > 2\}$ و $\{x : x < 0\}$

∴ النقاط : $(2,16)$ و $(0,0)$ تمثل نقطة انقلاب

مثال 20

جد مناطق التقعر والتحدب للدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

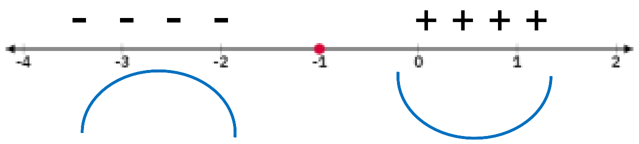
$$(6x + 6 = 0) \div 6 \quad \Rightarrow x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = -1$$

$$y = f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) + 1$$

$$= -1 + 3 - 3 + 1 = 0$$

∴ احداثيات نقطة الانقلاب المرشحة: $(-1,0)$

إشارة $f''(x)$



∴ مناطق التقعر: $\{x: x > -1\}$

مناطق التحدب: $\{x: x < -1\}$

∴ النقطة : $(-1,0)$ تمثل نقطة انقلاب

تمارين (2-2)

س1) جد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب لكل من الدوال الأتية:

a. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2$

c. $f(x) = x^5$

d. $f(x) = (x - 2)^3 + 3$

e. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$

س2) جد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص ومناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب لكل من الدوال الأتية:

a. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

b. $f(x) = 4 + 3x - x^2$

5.2. رسم الدوال الحقيقية باستعمال التفاضل

تتم عملية رسم الدوال بواسطة التفاضل باتباع الخطوات التالية:

1. نجد أوسع مجال للدالة. {أوسع مجال للدالة متعددة الحدود هو $\mathbb{R}$} ما عد النقاط التي تجعل الدالة غير معرفة او تعطي اعداد غير حقيقة.
2. نجد نقاط تقاطع الدالة مع المحورين:-
   i. مع المحور السيني – $x-axis$: نفرض $y=0$ ونجد جميع قيم x (نقطة التقاطع $(x,0)$).
   ii. مع المحور الصادي – $y-axis$: نفرض $x=0$ ونجد جميع قيم y (نقطة التقاطع $(0,y)$).
3. نختبر تناظر الدالة حول المحورين:
   i. متناظرة حول المحور الصادي : اذا كان $f(x)=f(-x)$. {تتحقق مع الدوال ذات الاسس الزوجية}
   ii. متناظرة حول نقطة الأصل: اذا كان $f(-x)=-f(x)$. {تتحقق مع الدوال ذات الاسس الفردية}
   iii. غير متناظرة : اذا كان $f(x)\neq \pm f(-x)$. {تتحقق مع الدوال ذات الاسس الزوجية والفردية بنفس الوقت}
4. نجد النهايات العظمى والصغرى ومناطق التزايد والتناقص على خط الاعداد $f'(x)$.
5. نجد نقاط الانقلاب ومناطق التقعر والتحدب على خط الاعداد $f''(x)$.
6. نرسم الدالة بعد تحديد النقاط أعلاه على المحورين الاحداثيين وإذا كانت قليلة يمكن إضافة نقاط إضافية.

مثال 21

ارسم منحني الدالة $f(x)=x^3-9x$

الحل

1. أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$
2. إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

$(0,0)$ التقاطع مع محور الصادات $\Leftarrow$ $y=f(0)=(0)^3-9(0)=0 \;\Leftarrow\; x=0$ عندما

$y=0 \Rightarrow x^3-9x=0 \Rightarrow x(x^2-9)=0$ عندما

$\Rightarrow x(x-3)(x+3)=0$

أما $x=0$ أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$ أو $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ التقاطع مع محور السينات: $(-3,0)$ و $(3,0)$ و $(0,0)$

3. نختبر تناظر الدالة حول المحورين:

غير متناظر $\Leftarrow$ $f(-x)=(-x)^3-9(-x)=-x^3+9\neq f(x)$ $\Leftarrow$ حول محور الصادات

حول نقطة الأصل $\Leftarrow$ $-f(x)=-(x^3-9x)=-x^3+9$

$f(-x)=-x^3+9$ $\qquad$ متناظر $\Leftarrow$ $\therefore f(-x)=-f(x)$

4. إيجاد النهايات الحرجة ومناطق التزايد والتناقص:

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$(3x^2 - 9 = 0) \div 3 \quad \Rightarrow x^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

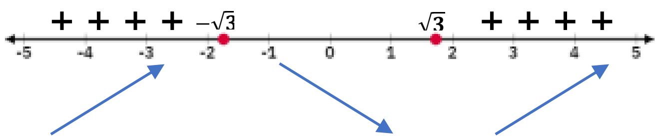
أما $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$

$$y_1 = f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$$

$$y_2 = f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ و $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$

إشارة $f'(x)$



∴ مناطق التزايد: $\{x: x > \sqrt{3}\}$ و $\{x: x < -\sqrt{3}\}$ ومناطق التناقص: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

النقطة $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ نهاية صغرى محلية والنقطة $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$ نهاية عظمى محلية

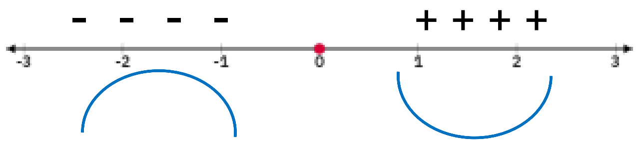
5. إيجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

$$f''(x) = 6x$$

$(6x = 0) \div 6 \quad \Rightarrow x = 0$ {تم تعويضها مسبقا في دالة $f(x)$ في الخطوة 2}

∴ $(0,0)$ تمثل نقطة انقلاب حسب الاختبار ادناه

إشارة $f''(x)$

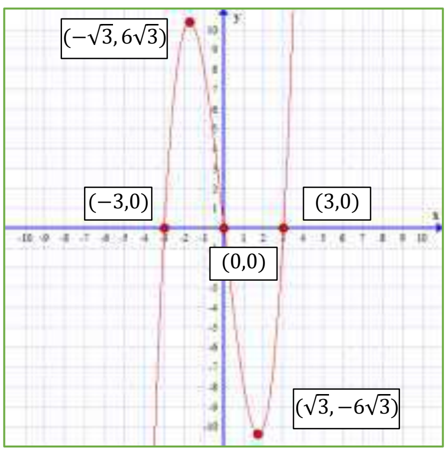


∴ مناطق التقعر: $\{x: x > 0\}$

مناطق التحدب: $\{x: x < 0\}$

6. لا نحتاج لنقاط إضافية لذا نكون جدول النقاط ونرسم مباشرة

x	y	(x, y)
0	0	(0,0)
3	0	(3,0)
−3	0	(−3,0)
$\sqrt{3}$	$-6\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$
$-\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$



الشكل (5-2)

مثال 22

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 - 4$

الحل

1. أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$
2. إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

عندما $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0)^2 - 4 = -4 \Rightarrow$ التقاطع مع محور الصادات $(0,-4)$

عندما $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

$\therefore$ التقاطع مع محور السينات: $(-2,0)$ و $(2,0)$

3. نختبر تناظر الدالة حول المحورين:

حول محور الصادات $\Rightarrow f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x) \Rightarrow$ متناظرة

حول نقطة الأصل $\Rightarrow -f(x) = -(x^2 - 4) = -x^2 + 4$

$f(-x) = x^2 - 4$ $\qquad \therefore f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ غير متناظرة

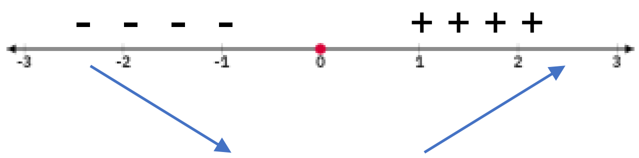
4. إيجاد النهايات الحرجة ومناطق التزايد و التناقص:

$f'(x) = 2x$

$(2x = 0) \div 2 \Rightarrow x = 0$ {تم تعويضها مسبقا في دالة $f(x)$ في الخطوة 2}

$\therefore$ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(0,-4)$

إشارة $f'(x)$



مناطق التناقص : $\{x: x < 0\}$ ومناطق التزايد: $\{x: x > 0\}$

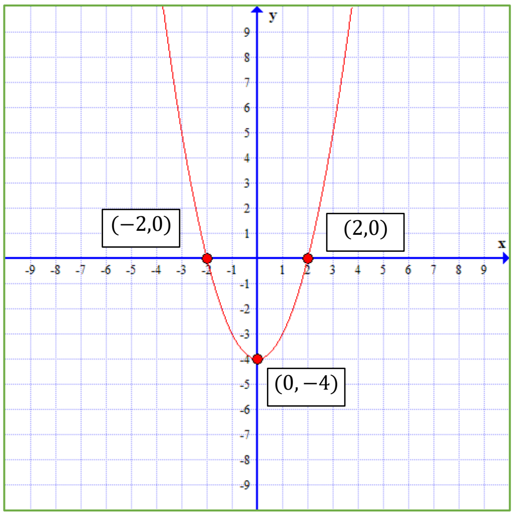
5. إيجاد مناطق التقعر و التحدب ونقاط الانقلاب:

$f''(x) = 2$

$\because$ المشتقة ثابتة $\Leftarrow$ $\therefore$ الدالة مقعرة في مجالها

6. لا نحتاج لنقاط إضافية لذا نكون جدول النقاط ونرسم مباشرة

x	y	(x,y)
0	-4	$(0,-4)$
2	0	$(2,0)$
-2	0	$(-2,0)$



الشكل (6-2)

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^5$

الحل

1. أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$
2. إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

عندما $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = (0)^5 = 0 \Rightarrow$ التقاطع مع محور الصادات $(0,0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow 0 = x^5 \quad \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ التقاطع مع محور السينات $(0,0)$

3. نختبر تناظر الدالة حول المحورين:

حول محور الصادات $\Rightarrow f(-x) = (-x)^5 = -x^5 \neq f(x) \Rightarrow$ غير متناظرة

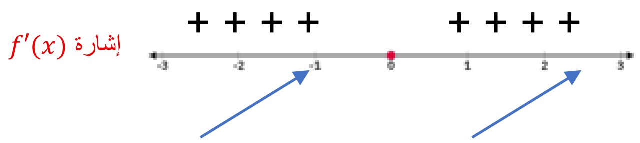
حول نقطة الأصل $\Rightarrow -f(x) = -(x^5) = -x^5 = f(-x) \Rightarrow$ متناظرة

4. إيجاد النهايات الحرجة ومناطق التزايد والتناقص:

$$f'(x) = 5x^4$$

$(5x^4 = 0) \div 5 \quad \Rightarrow x = 0$ {تم تعويضها مسبقا في دالة $f(x)$ في الخطوة 2}

∴ احداثيات النقاط الحرجة هي: $(0,0)$



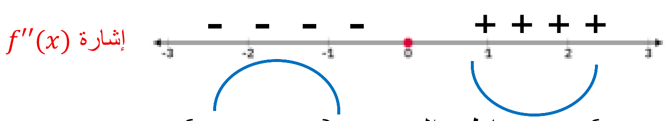
∴ الدالة متزايدة في مجالها

5. إيجاد مناطق التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب:

$$f''(x) = 20x^3$$

$(20x^3 = 0) \div 20 \quad \Rightarrow x = 0$ {تم تعويضها مسبقا في دالة $f(x)$ في الخطوة 2}

∴ النقطة $(0,0)$ تمثل انقلاب حسب الاختبار ادناه



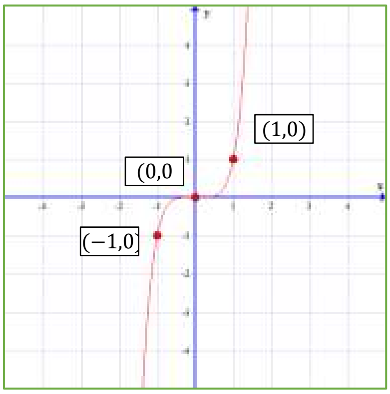
مناطق التقعر : $\{x: x > 0\}$ ومناطق التحدب: $\{x: x < 0\}$

6. نحتاج نقاط إضافية ⟸ نختار قيمتين لـ(x) نعوضهما في $f(x)$ مثلا: $\{1, -1\}$

$y_1 = f(1) = (1)^5 = 1 \quad \Longrightarrow (1,1)$

$y_2 = f(-1) = (-1)^5 = -1 \quad \Longrightarrow (-1,-1)$

x	y	(x, y)
0	0	$(0,0)$
1	1	$(1,1)$
-1	-1	$(-1,-1)$



الشكل (2-7)

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

الحل

1. أوسع مجال للدالة هو $\mathbb{R}$
2. إيجاد نقاط التقاطع مع المحورين:

عندما $x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 \Rightarrow$ التقاطع مع محور الصادات $(0,0)$

عندما $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ (عامل مشترك)

$\Rightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0$ (تجربة)

$\Rightarrow x(x-3)(x-3) = 0$

أما $x = 0$ أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ التقاطع مع محور السينات: $(3,0)$ و $(0,0)$

3. نختبر تناظر الدالة حول المحورين:

حول محور الصادات $\Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x$

غير متناظرة $\Rightarrow \ne f(x)$

حول نقطة الأصل $\Rightarrow -f(x) = -(x^3 - 6x^2 + 9x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

غير متناظرة $\Rightarrow \ne f(-x)$

4. إيجاد النهايات الحرجة ومناطق التزايد و التناقص:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$(3x^2 - 12x + 9 = 0) \div 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ (تجربة)

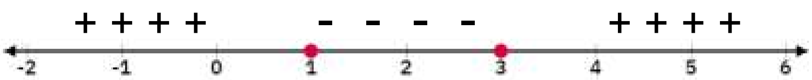
$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y_1 = f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0 \Rightarrow (3,0)$ نقطة حرجة

$y_2 = f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4 \Rightarrow (1,4)$ نقطة حرجة

إشارة $f'(x)$



$\therefore$ مناطق التزايد: $\{x: x > 3\}$ و $\{x: x < 1\}$ ومناطق التناقص: $(1\ ,3)$

النقطة $(1,4)$ نهاية عظمى محلية والنقطة $(3,0)$ نهاية صغرى محلية

5. إيجاد مناطق التقعر و التحدب ونقاط الانقلاب:

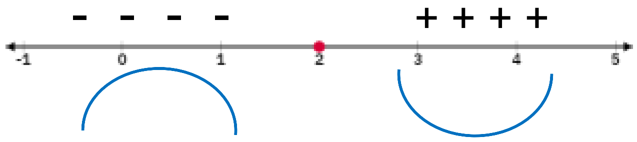
$$f''(x) = 6x - 12$$

$(6x - 12 = 0) \div 6 \qquad \Rightarrow x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow x = 2$

$$y = f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 8 - 24 + 18 = 2$$

∴ النقطة $(2,2)$ تمثل انقلاب حسب الاختبار ادناه

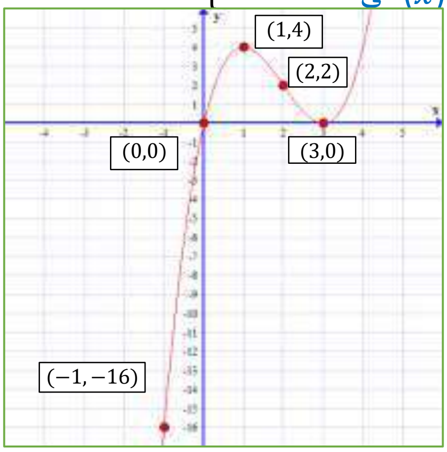
إشارة $f''(x)$



مناطق التقعر : $\{x : x > 2\}$ ومناطق التحدب: $\{x : x < 2\}$

7. نحتاج نقاط إضافية ⟸ نختار قيمة لـ(x) نعوضهما في $f(x)$ مثلا: $\{-1\}$ {اخترناها سالبة لعدم توفر قيمة سالبة لـ(x) في النقاط اعلاه}

x	y	(x, y)
0	0	(0,0)
3	0	(3,0)
1	4	(1,4)
2	2	(2,2)
−1	−16	(−1, −16)



الشكل (2-8)

تمارين (2-3)

س1) بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة لكل من الدوال الأتية:

a. $f(x) = x^3 - 3x$

b. $f(x) = x^4 - 2x^2$

c. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

d. $f(x) = 1 - x^2$

e. $f(x) = x^3 + x$

6.2. تطبيقات على المشتقة

1.6.2. تطبيقات عملية على النهايات العظمى والصغرى

يمكننا هذا التطبيق من ايجاد اكبر او اصغر او اقل قيمة لمتغير ما ضمن شروط معينة معطاة في السؤال ، وسنتطرق لبعض الأمثلة على ذلك مع توضيح لخطوات الحل.

لحل أي سؤال من أسئلة تطبيقات النهايات نتبع الخطوات التالية:

1. نقوم بفرض متغيرات بدل المجاهيل (اعداد) ، ثم نفرض متغير مميز بدل عبارة (أكبر ما يمكن) أو (أصغر ما يمكن).
2. نجد علاقة رقم (1): مرتبطة بعبارة (أكبر ما يمكن) أو (أصغر ما يمكن) ، تعطى مباشرة في السؤال.
3. اذا احتوى الطرف الأيمن للعلاقة رقم (1) على متغيرين هنا يجب ان نجد علاقة رقم (2) تحتوي على نفس المتغيرين في العلاقة (1) من خلال:-
   i. علاقة مباشرة تعطى في السؤال.
   ii. دالة تحول الى علاقة.
   {لا حاجة لتكوين علاقة رقم (2) إذا احتوت العلاقة رقم (1) على متغير واحد فقط في طرفها الايمن}
4. نعوض علاقة رقم (2) في علاقة رقم (1).
5. يتم تبسيط علاقة رقم (1) لغرض الاشتقاق ثم نشتقها.
6. نصفر المشتقة ونجد قيمة المتغير من خلال المعادلة.
7. نختبر المتغير على خط الاعداد فاذا كان المطلوب (أكبر ما يمكن) ، نتحقق من انها نهاية عظمى وتهمل الصغرى... واذا كان المطلوب (أصغر ما يمكن) ، فنتحقق من انها نهاية صغرى وتهمل العظمى.
8. نجد قيمة المتغير الثاني ان وجد حيث يتم التعويض في العلاقة رقم (2).

مثال 25

ما العدد الذي إذا أضيف الى مربعه يكون أصغر ما يمكن.

الحل

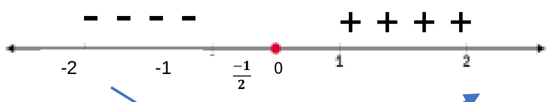
نفرض ان العدد x ∴مربع العدد x^2

نفرض ان ناتج الإضافة A

$$A = x + x^2$$
$$A' = 1 + 2x$$
$$1 + 2x = 0 \Rightarrow (2x = -1) \div 2 \quad \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

∵ أقل ما يمكن   ∴ يجب أن تظهر نهاية صغرى محلية

إشارة $f'(x)$



بعد الاختبار نلاحظ ان $-\frac{1}{2}$ نهاية صغرى محلية   ∴ العدد $= -\frac{1}{2}$

مثال 26

عددان موجبان مجموعهما (75) وحاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن.

الحل

نفرض ان العدد الاول x ونفرض ان العدد الثاني y

نفرض ان حاصل الضرب A

$$A = xy^2 \qquad \dots (1)$$

$$x + y = 75 \quad \dots (2)$$

نكون معادلة (3) من المعادلة (2)

$$x = 75 - y \quad \dots (3)$$

نعوض معادلة (3) من المعادلة (1)

$$A = (75 - y)y^2$$

$$= 75y^2 - y^3$$

$$A' = 150y - 3y^2 \Rightarrow (150y - 3y^2 = 0) \div 3 \Rightarrow 50y - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow y(50 - y) = 0$$

$50 - y = 0 \Rightarrow y = 50$ أو $y = 0$ {يهمل لان العددان موجبان} أما

إشارة $f'(x)$ - - - - يهمل + + + +   - - - -

بعد الاختبار نلاحظ ان 50 نهاية عظمى محلية $\therefore$ العدد الثاني هو $y = 50$

نعوض قيمة y في معادلة (3) لنجد قيمة x

$x = 75 - 50 \Rightarrow x = 25$ العدد الأول

2.6.2. التطبيقات الفيزيائية على المشتقة

تتضمن هذه الأسئلة: -

1. الازاحة يرمز لها $d(t)$ ووحدتها : $m \; , \; cm.$
2. السرعة يرمز لها $v(t)$ ووحدتها : $m/sec \; , \; cm/sec.$
3. التعجيل يرمز له $a(t)$ ووحدته : $m/sec^2 \; , \; cm/sec^2$

ملاحظة2

(الأزاحة s / المسافة d) $\xrightarrow{\text{اشتقاق}}$ (السرعة v) $\xrightarrow{\text{اشتقاق}}$ (التعجيل a)

مثال 27

قذف جسم نحو الأعلى عن سطح الأرض بإزاحة معرفة بالعلاقة $d(t) = 96t - 16t^2$ حيث d الازاحة بالأمتار و t الزمن بالثواني جد :

1) سرعة الجسم بعد ثانيتين.

2) متى يصل الجسم الى اقصى ارتفاع. {ملاحظة: يصل الجسم الى اقصى ارتفاع عندما تصبح سرعته = 0}.

الحل

1) السرعة $v(t) =$ مشتقة الازاحة $d'(t)$

(إيجاد قانون السرعة) $\Rightarrow v(t) = d'(t) = 96 - 32t$

$$v(2) = 96 - 32(2)$$

سرعة الجسم بعد ثانيتين
يعني $t = 2$

$$= 96 - 64 = 32\ m/sec$$

2) نعوض بالسرعة $v(t) = 0$ لوصول الجسم لأقصى ارتفاع

$$96 - 32t = 0$$

$$(96 = 32t) \div 32$$

$t = 3\ sec$ يصل الجسم لأقصى ارتفاع بعد 3 ثواني

مثال 28

جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $d(t) = t^3 - 3t^2 + 5$ حيث d الازاحة بالامتار و t الزمن بالثواني جد :

1) سرعة الجسم بعد 3 ثواني من بدء الحركة.

2) تعجيل الجسم عندما تنعدم سرعته. {انعدام سرعة الجسم يعني $v(t) = 0$}.

3) الازاحة التي يقطعها الجسم عندما يصبح تعجيله $6\ m/sec^2$.

الحل

1) السرعة $v(t) =$ مشتقة الازاحة $d'(t)$

$$v(t) = d'(t) = 3t^2 - 6t$$

$$v(3) = 3(3)^2 - 6(3)$$

$$= 27 - 18 = 9\ m/sec$$

2) التعجيل $a(t) =$ مشتقة السرعة $v'(t)$

(إيجاد قانون التعجيل) $\Rightarrow a(t) = v'(t) = 6t - 6$

نعوض بالسرعة $v(t) = 0$ لانعدام سرعة الجسم

$$(3t^2 - 6t = 0) \div 3$$

$$t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t(t - 2) = 0$$

أما $t = 0$ يهمل أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ الزمن الذي تنعدم فيه السرعة

(التعجيل عند انعدام السرعة) $\Rightarrow a(2) = 6(2) - 6$

$$= 12 - 6 = 6\ m/sec^2$$

3) لإيجاد إزاحة الجسم $d(t)$ نحتاج لزمن t لكي نعوضه في قانون الازاحة ، لذا نحصل عليه من المعطى $(a(t) = 6)$

$$a(t) = 6$$

$$6t - 6 = 6 \quad \Rightarrow (6t = 12) \div 6 \qquad \Rightarrow t = 2sec$$ الزمن

(نعوض الزمن لايجاد الازاحة) $\Rightarrow d(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 8 - 12 + 5$

الازاحة المقطوعة $= 1m$

3.6.2. التطبيق الهندسي للمشتقة

تكمن أهمية المشتقة في إيجاد ميل المستقيم المماس لاي نقطة من نقاط منحنى الدالة.

حيث أن:

$$\underbrace{m}_{\text{ميل المماس}} = \underbrace{f'(x)}_{\text{مشتقة الدالة}}$$

لإيجاد معادلة المماس لمنحنى أي دالة نتبع الخطوات الأتية:

1. نشتق الدالة.
2. نعوض عن قيمة x في مشتقة الدالة لايجاد الميل.
3. نعوض قيمة x في الدالة الاصلية لايجاد قيمة y ، وبذلك تتكون لدينا احداثيات نقطة.
4. يصبح لدينا ميل ونقطة.
5. نجد معادلة المماس من الميل و النقطة باستخدام القانون:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال 29

جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = x^3 - 2x + 10$ عند $x = 1$.

الحل

(الميل عند أي نقطة) $\Longrightarrow \quad m = f'(x) = 3x^2 - 2 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{m = 3x^2 - 2}_{\text{معادلة ميل المماس}}$

(الميل عند $x = 1$) $\Longrightarrow \quad m(1) = 3(1)^2 - 2 = 3 - 2 = 1$ (الميل)

نعوض عن قيمة x بالدالة الاصلية لايجاد قيمة y:

$y = f(1) = (1)^3 - 2(1) + 10 = 1 - 2 + 10 = 9 \Longrightarrow (1,9)$ (نقطة التماس)

نعوض نقطة التماس و الميل بمعادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 9 = 1(x - 1)$$
$$y - 9 = x - 1$$
$$x - y + 8 = 0$$ (معادلة المستقيم المماس)

مثال 30

جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعها مع محور الصادات.

الحل

نعوض $x = 0$ بالدلة الاصلية لايجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات والتي تمثل نقطة التماس :

$$y = f(0) = (0)^2 + 1$$
$$= 1$$

(احداثيات نقطة التماس) $\Longrightarrow$ $(0,1)$

نشتق الدالة الاصلية لإيجاد معادلة ميل المستقيم المماس:

(الميل عند أي نقطة) $\Longrightarrow$ $m = f'(x) = 2x$

(الميل عند $x = 0$) $\Longrightarrow$ $m(0) = 2(0) = 0$

نعوض نقطة التماس والميل بمعادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 0(x - 0)$$

$y - 1 = 0$ (معادلة المستقيم المماس)

مثال 31

جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$.

الحل

(الميل عند أي نقطة) $\Longrightarrow$ $m = f'(x) = 4x + 3$

(الميل عند $x = 2$) $\Longrightarrow$ $m(2) = 4(2) + 3$

$= 8 + 3 \quad = 11$ (الميل)

نعوض عن قيمة x بالدالة الاصلية لايجاد قيمة y:

$$y = f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$
$$= 8 + 6 + 1 \quad = 15$$

(احداثيات نقطة التماس) $\Longrightarrow$ $(2,15)$

نعوض نقطة التماس والميل بمعادلة المستقيم:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 15 = 11(x - 2)$$
$$y - 15 = 11x - 22$$

$11x - y - 7 = 0$ (معادلة المستقيم المماس)

4.6.2. تطبيقات المشتقة في الاقتصاد

أن تطبيقات المشتقة في الاقتصاد تعتمد على الأمور الأربعة ادناه:-

1. دالة الكلفة الكلية $\Leftarrow$ رمزها $C(x)$
2. دالة الكلفة الحدية $\Leftarrow$ رمزها $MC = C'(x)$

{ملاحظة: كلمة حدية تعني اشتقاق}

3. دالة معدل الكلفة الكلية $\Leftarrow$ رمزها $AC = \frac{C(x)}{x}$
4. معدل الكلفة الحدية $\Leftarrow$ AC'

ملاحظة3

لإيجاد حجم الإنتاج (x) $\Leftarrow$ نجعل $AC' = 0$ ونحل المعادلة ونجد قيمة (x)

مثال 32

لتكن دالة الكلفة الكلية $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد:

1) دالة الكلفة الحدية.
2) دالة معدل الكلفة الكلية.

الحل

$$1)\ MC = C'(x) = \frac{1}{2}(2x) - 2 \quad = x - 2$$

$$2)\ AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{5}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}$$ (معدل الكلفة الكلية)

مثال 33

لنفرض أن دالة الكلفة الكلية لإنتاج سلعة ما $C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد:

1) دالة الكلفة الحدية.
2) دالة معدل الكلفة.
3) دالة معدل الكلفة الحدية.
4) حجم الإنتاج الذي يعطي اقل معدل.

الحل

1) (دالة الكلفة الحدية) $\Longrightarrow MC = C'(x) = 6x - 60$

2) (دالة معدل الكلفة) $\Longrightarrow AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{60x}{x} + \frac{1200}{x} = 3x - 60 + \frac{1200}{x}$

3) (دالة معدل الكلفة الحدية) $\Longrightarrow AC' = 3 + \frac{-1200}{x^2}$

$$= 3 - \frac{1200}{x^2}$$

4) (إيجاد حجم الانتاج) $\Longrightarrow AC' = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 - \frac{1200}{x^2} = 0$

$\frac{1200}{x^2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad (3x^2 = 1200) \div 3$

$x^2 = 400$ (جذر الطرفين)

$x = \pm 20$ (السالب يهمل لان حجم الإنتاج قيمة موجبة)

$x = 20$ حجم الإنتاج

تمارين (2-2)

س1) ما العددان اللذان مجموعهما (20) ، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن.

س2) قسم العدد (60) الى جزئين بحيث أن حاصل ضرب أحدهما في مكعب الأخر يكون اكبر ما يمكن.

س3) لتكن $v(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ حيث أن الازاحة d بالامتار و t الزمن بالثواني جد:

أ. السرعة عندما الزمن ($t = 2$).

ب. السرعة عندما التعجيل ($a(t) = 0$).

س4) لتكن $v(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $v(t) = t^3 - t^2 + 5$ جد السرعة عندما التعجيل يساوي ($8\ m/sec^2$).

س5) جسم تحرك على خط مستقيم وفق العلاقة $d(t) = 24t^2 - t^3$ حيث الازاحة d بالأمتار و t الزمن بالثواني جد:

أ. السرعة بعد 2 ثانية من بدء الحركة.

ب. الازاحة عندما التعجيل ($a(t) = 0$).

س6) لنفرض ان الكلفة الكلية لصنع x من وحدات سلعة هي $C(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$ ، جد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50.

س7) جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 + 2x + 1$ عند $x = 1$.

س8) جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 1$ عند نقطة تقاطعها مع محور y.

الفصل الثالث

(التكامل)

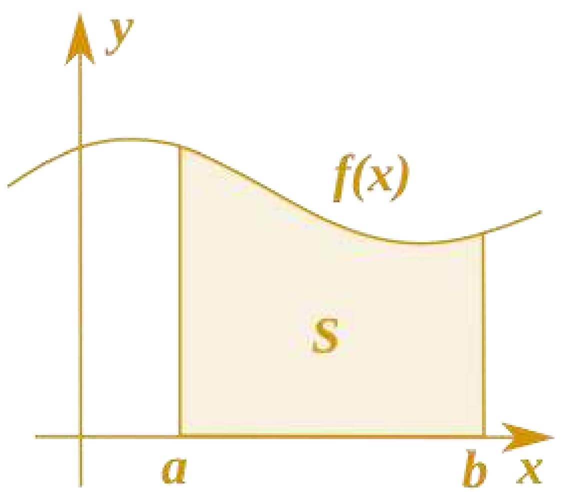
INTEGRATION

البنود

1-3	مفهوم التكامل
2-3	قانون التكامل الغير محدد
3-3	القواعد الأساسية للتكامل الغير المحدد
4-3	التكامل المحدد
5-3	خواص التكامل المحدد
6-3	المساحة المحددة بالمنحني والمحور
7-3	تطبيقات على التكامل

الأهداف السلوكية

- يتعرف الطالب على مفهوم التكامل
- يتعرف الطالب ويستوعب القواعد الأساسية في حل مسائل التكامل
- يتعرف الطالب على مفهوم التكامل المحدد وخواصه
- يتمكن الطالب من إيجاد المساحات المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات
- يتعرف الطالب على تطبيقات التكامل في الأمور الحياتية



الفصل الثالث - التكامل - Integration

1.3. مفهوم التكامل

توجد في الرياضيات الكثير من العمليات العكسية ، الطرح عكس الجمع ، الضرب عكس القسمة، الجذر عكس الرفع بحيث ان كل منها تزيل تأثير الأخرى . وفي المراحل السابقة درسنا عملية الاشتقاق.

في هذا الفصل سندرس عملية عكس الاشتقاق ونقصد بعكس الاشتقاق عملية إيجاد الصيغة العامة للدالة التي أعطيت مشتقتها ويرمز للتكامل بالرمز ($\int$) ونعبر عن عملية عكس الاشتقاق للدالة $f(x)$ بأستعمال هذا الرمز بالصورة :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

2.3. قانون التكامل

$$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$ ، c عدد حقيقي

3.3. القواعد الأساسية للتكامل الغير محدد

1. $\int a\, f(x)dx = a \int f(x)\, dx \quad \forall a \in R$

2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $\int [f(x)]^n\, f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$ (c عدد حقيقي)

مثال 1

جد قيمة التكاملات الاتية:

1. $\int 4x^2\, dx$ 2. $\int 5x^3 + 3x^2 - 3x\ \ dx$ 3. $\int (x^2+1)(2x-3)\, dx$

الحل

1. $\int 4x^2\, dx = 4\int x^2 dx = 4\frac{x^3}{3} + c$

2. $\int (5x^3 + 3x^2 - 3x)\ \ dx = \int 5x^3\, dx + \int 3x^2\, dx - \int 3x\, dx$

$$= \frac{5x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + c = \frac{5}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + c$$

$$3.\ \int \underbrace{(x^2+1)(2x-3)}_{\text{فتح الاقواس قبل التكامل}}\,dx = \int (2x^3-3x^2+2x-3)\,dx$$

$$= \frac{2x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x + c$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 3x + c$$

ملاحظة1

عند اجراء تكامل لدالة جذرية يجب التخلص من الجذر - ارجاعه الى قوة كسرية- وبعدها نكامل المقدار

تذكير

طريقة ارجاع الجذر الى قوة كسرية $\Leftarrow$ $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ يعني (نقسم قوة داخل الجذر على قوة الجذر)

مثال: $\sqrt[2]{(x-4)^3} = (x-4)^{\frac{3}{2}}$

{هذه الخاصية عكسية اي بالإمكان ارجاع القوة الكسرية الى جذر}

مثال 2

جد قيمة التكاملات الاتية:

$1.\ \int \sqrt[3]{x^5}\,dx \qquad 2.\ \int \sqrt{x}\,dx$

الحل

$$1.\ \int \sqrt[3]{x^5}\,dx = \int x^{\frac{5}{3}}dx = \frac{x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + c$$

$$2.\ \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

تذكير

عند تغيير الأس من البسط الى المقام أو بالعكس تتغير اشارته مع المحافظة على إشارة الأساس دون تغيير

مثال: $\frac{2}{x^4} = 2x^{-4}$

ملاحظة2

لكي نكامل دالة كسرية يجب تبسيط الكسر والتخلص من المقام قبل اجراء التكامل وكما يلي:

حالة 1. اذا كان البسط والمقام دوال ليست ثابتة وليست دوال مرفوعة لقوة ، عندها نقوم بتحليل الدوال بإحدى طرق التحليل (عامل مشترك ، فرق بين مربعين ، التجربة ، فرق أو مجموع بين مكعبين) ثم نجري اختصار بين البسط والمقام.

حالة 2. ننقل المقام الى البسط مع تغيير اشارته في الحالات الأتية:

i. اذا كان المقام فقط يحوي المتغير x.

مثال: $\frac{4}{x^2} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{تحويل}} 4x^{-2}$

ii. اذا كان البسط والمقام عبارة عن دوال ليست ثابتة ، والمقام عبارة عن دالة مرفوعة لقوة.

مثال: $\frac{(x-5)}{(x^2-10x)^3} \underbrace{\Longrightarrow}_{\text{تحويل}} (x-5)(x^2-10x)^{-3}$

مثال 3

جد قيمة التكاملات الاتية:

$1. \int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx \qquad 2. \int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx \qquad 3. \int \frac{2}{x^3}\,dx$

الحل

$$1.\ \int \frac{x^4-8x}{x-2}\,dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}\,dx = \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}\,dx$$

$$= \int x^3 + 2x^2 + 4x\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$$

$$2.\ \int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx = \int \frac{\big((2x^2-3)-3\big)\big((2x^2-3)+3\big)}{x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2-6)(2x^2)}{x^2}\,dx$$

$$= \int (4x^2-12)\ dx$$

$$= \frac{4x^3}{3} - 12x + c$$

$$= \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$$

3. $\int \frac{2}{x^3}\,dx = \int 2x^{-3}\,dx = 2\frac{x^{-2}}{-2} + c$

$$= -\frac{1}{x^2} + c$$

ملاحظة3

لكي نجري تكامل لدالتين مضروبتين احداهما مرفوعة لقوة يتوجب ان تمثل الدالة الاخرى مشتقة للدالة الاولى:

$$\int (\text{دالة اولى})^n \times \underbrace{(\text{دالة ثانية})}_{\text{مشتقة الدالة الاولى}}\,dx = \frac{(\text{دالة اولى})^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال 4

جد قيمة التكاملات الاتية:

1. $\int (x^2+1)^3\; 2x dx$ 2. $\int (x^2+8)^2\, x dx$ 3. $\int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$

الحل

1. $\int \underbrace{(x^2+1)^3}_{\text{دالة مرفوعة لقوة}}\ \underbrace{2x}_{\text{مشتقتها}}\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + c = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c$

2. $\int \underbrace{(x^2+8)^2}_{\text{دالة مرفوعة لقوة}}\ \underbrace{x}_{\text{ينقص المتشقة 2}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{تقسم على 2}} \int (x^2+8)^2\ \underbrace{2x}_{\text{ضرب بـ2}}\,dx$

قمنا بضرب وتقسيم الدالة بـ(2) لحاجتنا لها في المشتقة

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+8)^3}{3} + c$$

$$= \frac{1}{6}(x^2+8)^3 + c$$

3. $\int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \int (x^2-4x+5)^{-2}(x-2)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}\underbrace{(2x-4)}_{\text{مشتقة الدالة}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-4x+5)^{-1} + c$$

تمارين (3-1)

سؤال) جد تكاملات كلا مما يأتي:

1. $\int (5x^3 + 4x^2 + 3)dx$

2. $\int (2x - 1)(x + 5)dx$

3. $\int (3x^2 + 5)\, dx$

4. $\int (x - 2)\, (x + 1)^2 dx$

5. $\int (x^2 + 1)(2x - 3)dx$

6. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2} dx$

7. $\int \frac{(3x^2 - 4)^2 - 16}{x^2}\, dx$

8. $\int \sqrt{x}\, \left(\sqrt{x} + x\right)^2 dx$

9. $\int \left(\frac{x^4 - 16}{x + 2}\right) dx$

10. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 4}\, \, dx$

11. $\int \sqrt[5]{(1 - 3x)^2}\, dx$

12. $\int (3x^2 + 8x + 5)^6 (3x + 4)\, dx$

4.3. التكامل المحدد

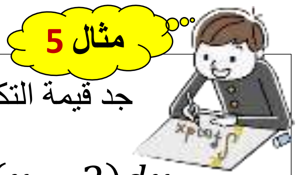
اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$ ، وكانت $F(X)$ عكس مشتقة $f(x)$ أي ان : $\forall x \in (a,b)$ $F'(X) = f(x)$ فأن :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

يطلق على a الحد الأدنى للتكامل وعلى b الحد الأعلى للتكامل

5.3. خواص التكامل المحدد:

نفس خواص التكامل الغير محدد ، غير أن من أهم خواصه هو أن ناتج التكامل هو عدد وليس دالة كما في التكامل غير المحدد..



جد قيمة التكاملات الاتية:

1. $\int_1^5 3x^2 dx$ 2. $\int_1^2 (x^2+2x)dx$ 3. $\int_0^4 x(x-1)(x-2)dx$

الحل

1. $\int_1^5 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3}\Big]_1^5 = x^3]_1^5$

$= 5^3 - 1^3$

$= 125 - 1 = 124$

2. $\int_1^2 (x^2+2x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big]_1^2$

$= \left(\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right)$

$= \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{16}{3}$

3. $\int_0^4 x(x-1)(x-2)dx = \int_0^4 x^3 - 3x^2 + 2x \ dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big]_0^4$

$= \left(\frac{4^4}{4} - 4^3 + 4^2\right) - 0 = 16$

مثال 6

جد قيمة التكاملات الاتية:

1. $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$ 2. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$ 3. $\int_1^2 \frac{(3x^2+2x)}{x}\,dx$

4. $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\,dx$

الحل

1. $$\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$$

$$= \int_2^3 (x^2+x+1)\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+ x\Big]_2^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}+2\right)$$

$$= \left(9+\frac{9}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right) = \frac{59}{6}$$

2. $$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_0^4 x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 2x(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\times \frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg]_0^4$$

$$= \frac{1}{2}\times \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\,(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4$$

بالإمكان التعويض مباشرة دون ارجاع القوة الى جذر

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3}\Big]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(4^2+9)^3}-\sqrt{(0^2+9)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{25^3}-\sqrt{9^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

3. $\int_1^2 \frac{(3x^2+2x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{x(3x+2)}{x}\,dx$

$$= \int_1^2 (3x+2)\,dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} + 2x\Big]_1^2$$

$$= \left(3\,\frac{2^2}{2} + 2(2)\right) - \left(3\,\frac{1^2}{2} + 2(1)\right)$$

$$= (6+4) - (\frac{3}{2} + 2)$$

$$= 10 - \frac{7}{2} = \frac{13}{2}$$

4. $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\,dx = \int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 3(3x-1)^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{(3x-1)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\Bigg]_0^3$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{(3x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\Bigg]_0^3$$

$$= \frac{1}{5}\,(3x-1)^{\frac{5}{3}}\Big]_0^3$$

$$= \frac{1}{5}\,\sqrt[3]{(3x-1)^5}\Big]_0^3$$

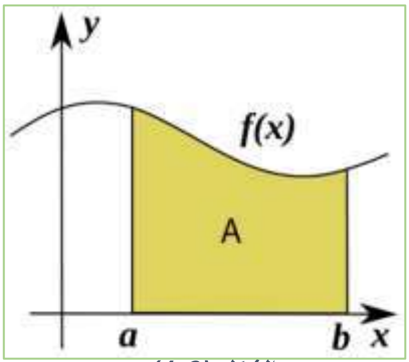
$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{(3(3)-1)^5} - \sqrt[3]{(3(0)-1)^5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{(-1)^5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(32+1) = \frac{33}{5}$$

6.3. تطبيقات على التكامل

1.6.3. المساحة المحددة بالمنحني والمحور



الشكل (3-1)

من التطبيقات المهمة للتكامل المحدد هو إيجاد المساحة تحت منحني الدالة $y=f(x)$ حيث $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $[a,b\,]$ ، وسندرس إيجاد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)$ ومحور السينات $x-axis$ والمستقيمين $x=a$ ، $x=b$ وتعطى بالعلاقة :

$$\boxed{A\ =\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|}$$

وكما في الشكل (3-1)

ملاحظة4

اذا اردنا إيجاد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x)$ والمحور x والمحددة بالفترة المعطاة $[a,b]$ فيتوجب إيجاد نقاط تقاطع منحني الدالة مع المحور x (أي قيم x) فاذا كانت القيم لا تنتمي للفترة $[a,b]$ أو مساوية لحدود الفترة أي $x=a$ أو $x=b$ فتهمل القيم ونكمل عملية التكامل المحدد لإيجاد المساحة بالاعتماد على الفترة المعطاة $[a,b]$ ، أما اذا كانت القيم تنتمي للفترة المفتوحة (a,b) فنقوم بترتيبها تصاعديا ثم نستخدم كل قيمتين متتاليتين كحدي تكامل (أي نجزئ التكامل) بعدها نجمع التكاملات لإيجاد المساحة.

مثال 7

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=f(x)=x^2-2x-3$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,3\,]$.

الحل

{نجد نقاط تقاطع منحني الدالة مع المحورx} $\Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0$

$$\Rightarrow x=3,\ x=-1$$

قيمتي x مساوية لحدود الفترة لذا لا داعي لتجزئة التكامل

$$A=\left|\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx\right| = \left|\left.\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3}\right|$$

$$=\left|[9-9-9]-\left[-\frac{1}{3}-1+3\right]\right|$$

$$=\left|-9-\frac{5}{3}\right|$$

$$=\left|-\frac{32}{3}\right|$$

$$=\frac{32}{3}\ \text{unit}^2$$ (المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات)

ملاحظة5

- اذا لم يعطينا حدود التكامل -أي الفترة- في السؤال والمطلوب إيجاد المساحة ، فيجب إيجاد الحدود قبل البدء بالحل عن طريق تصفير الدالة $(y = 0)$ ثم إيجاد قيم x والتي تمثل حدود التكامل.
- فاذا ظهرت لنا اكثر من قيمتين لـ(x) ، نقوم بترتيب القيم تصاعديا ثم نستخدم كل قيمتين كحدي تكامل ثم نجمع التكاملات ، كما في المثال التالي.

مثال 8

جد مساحة المنطقة المحددة بالدالة: $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات.

الحل

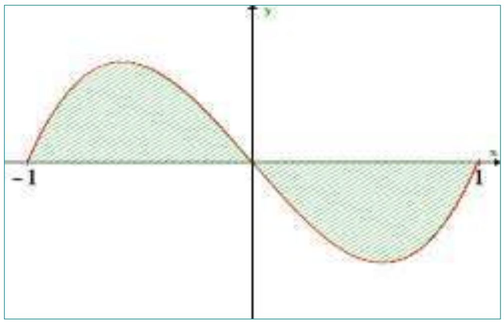
التقاطع مع محور السينات $y = 0$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(x-1)(x+1) = 0$$

أما $x = 0$ ، أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

أو $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$



الشكل (3-2)

نرتب قيم x تصاعدياً ، ثم نختار الحدود من الأصغر الى الأكبر $\{ \overbrace{[-1\,,0]}^{\text{حدود اول تكامل}} \quad \underbrace{[0\,,1]}_{\text{حدود ثاني تكامل}} \}$

$$A = A_1 + A_2 = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx \right| + \left| \int_{0}^{1} (x^3 - x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} \right|$$

$$= \left| 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right) \right| + \left| \left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^2}{2}\right) - 0 \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}\,\text{unit}^2$$

مثال 9

جد المساحة المحددة بمنحنى الدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

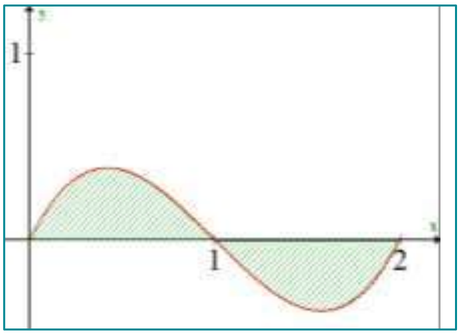
الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \; x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \; x(x-1)(x-2) = 0$$

أما $x = 0$ ، أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$



الشكل (3-3)

$\therefore$ فترات التكامل هنا : $[1,2]$, $[0,1]$

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right|$$

$$= \left|\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\Bigg| + \left|\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\Bigg|$$

$$= \left|\left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0\right| + \left|\left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4} - 1 + 1\right| + \left|(4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\,\text{unit}^2$$

مثال 10

جد مساحة المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 1$ ، $x = 3$.

الحل

$\because$ المساحة محدد بين المستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$ $\Leftarrow$ $\therefore$ الفترة هي $[1,3]$

$x^2 = 0 \implies x = 0 \notin [1,3]$

لا نكون فترتين لان قيمة x لا تنتمي للفترة

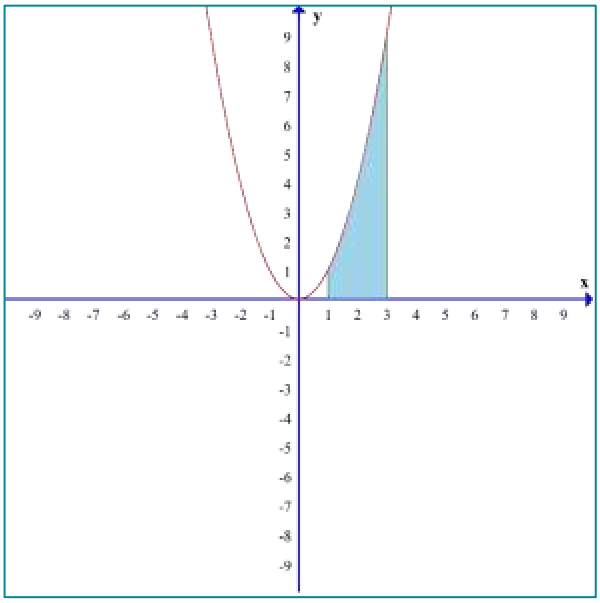
$$A = \left|\int_1^3 x^2\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{1^4}{3}\right)\right|$$

$$= \left|9 - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{26}{3}\right| \qquad = \frac{26}{3}\ unit^2$$



الشكل (3-4)

2.6.3 التطبيق الفيزيائي

لتكن $v(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستو ، فأن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

حيث d تمثل المسافة ، المسافة كمية غير متجهة اما الازاحة s والسرعة v والتعجيل a فان كلاً منها كمية متجهة فإن :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt \;\; , \;\; v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

ملاحظة

(المسافة d / الأزاحة s) $\xrightarrow[\text{تكامل}]{}$ (السرعة v) $\xrightarrow[\text{تكامل}]{}$ (التعجيل a)

مثال 11

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة وفق العلاقة $v(t) = 2t - 4 \ m/s$ فجد:

1. المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$
2. الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$
3. المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

الحل

1) (إيجاد الفترات) $\Rightarrow 2t - 4 = 0 \;\; \Rightarrow \; t = 2 \;\; \in [1,3] \;\; \Rightarrow [1,2]\,,[2,3]$

قيمة t في داخل الفترة لذا يتوجب تكوين فترتين لايجاد d، وهذا لا ينطبق على الازاحة s

$$\therefore \underbrace{d}_{\text{المسافة}} = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right|$$

$$= |\, t^2 - 4t]_1^2| \; + \; |\, t^2 - 4t]_2^3|$$

$$= \left|\left(2^2 - 4(2)\right) - \left(1^2 - 4(1)\right)\right| + \left|\left(3^2 - 4(3)\right) - \left(2^2 - 4(2)\right)\right|$$

$$= |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)|$$

$$= |-4 - (-3)| + |-3 - (-4)|$$

$$= |-1| + |1|$$

$$= 1 + 1 \qquad = \; 2\, m$$

2) $\underbrace{s}_{\text{الازاحة}} = \int_1^3 (2t-4)dt$

$= t^2 - 4t]_1^3$

$= \left(3^2 - 4(3)\right) - \left(1^2 - 4(1)\right)$

$= (9-12) - (1-4)$

$= -3 - (-3)$

$= -3 + 3$

$= 0\ m$

3) في الثانية الخامسة أي بمعنى الفترة تكون $\Longrightarrow [4,5]$

$t = 2 \notin [4,5]$

لا نُكون فترتين لان قيمة t لا تنتمي للفترة

$\underbrace{d}_{\text{المسافة}} = \left| \int_4^5 (2t-4)dt \right|$

$= \left| t^2 - 4t]_4^5 \right|$

$= \left| \left(5^2 - 4(5)\right) - \left(4^2 - 4(4)\right) \right|$

$= |(25-20) - (16-16)|$

$= |5 - 0|$

$= 5\ m$

ملاحظة6

في أسئلة التطبيقات الفيزيائية:

1) اذا كانت الفترة الزمنية المعطاة خلال ثانية معينة n فتكون فترة حدود التكامل $[n-1\ , n]$.

مثلا: إيجاد سرعة جسم خلال الثانية الخامسة $\Leftarrow$ الفترة الزمنية تكون $[4\ , 5]$.

2) اما ذكر في السؤال عبارة منذ بدء الحركة يعني ان الزمن الأول يساوي صفر.

مثلا: إيجاد بُعد جسم منذ بدء حركته الى الثانية الثالثة $\Leftarrow$ الفترة الزمنية تكون $[0\ , 3]$.

مثال 12

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $18\ m/s^2$ ، فاذا كانت سرعته قد أصبحت $82\ m/s$ بعد مرور 4 ثانية من بدأ الحركة جد:

1. المسافة خلال الثانية الثالثة.
2. بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثانية.

الحل

1) في المطلب الأول نحتاج لقانون المسافة لذا يجب ان نكامل التعجيل مرتين

$$\underbrace{v}_{\text{السرعة}} = \int \underbrace{a(t)}_{\text{التعجيل}}\, dt = \int 18\, dt \Rightarrow v = 18t + c$$

$$v(4) = 18t + c$$

تعويض $v(4) = 82$ و $t = 4$
لإيجاد قيمة الثابت c

$$82 = (18 \times 4) + c$$

$$\Rightarrow 82 = 72 + c \quad \Rightarrow c = 10$$

$$\therefore v = 18t + 10$$

$$\because 18t + 10 > 0 \quad \Rightarrow v > 0$$

المسافة خلال الثانية الثالثة يعني فترة الزمن بين 2 الى 3

$$\therefore d = \left|\int_2^3 (18t + 10)dt\right| = |\ 9t^2 + 10t]_2^3|$$

$$= |(9(3)^2 + 10(3)) - (9(2)^2 + 10(2))|$$

$$= |(81 + 30) - (36 + 20)|$$

$$= |111 - 56|$$

$$= 55\ m$$

2) منذ بدء الحركة (الزمن الأول = 0) ، بعد مرور 3 ثواني (الزمن الثاني = 3)

$$s = \int_0^3 (18t + 10)dt = 9t^2 + 10t]_0^3$$

$$= (9(3)^2 + 10(3)) - (9(0)^2 + 10(0))$$

$$= (81 + 30) - 0$$

$$= 111\ m$$

3.6.3 التطبيق الهندسي

درسنا في الفصل السابق عن التطبيق الهندسي للمشتقة حيث يمكننا إيجاد ميل المماس لاي نقطة على منحني الدالة بواسطة المشتقة ، وفي هذا الفصل سندرس العملية العكسية أي إيجاد معادلة منحني الدالة من دالة ميل المماس بواسطة التكامل.

$$\underbrace{y}_{\text{دالة المنحني}} = \underbrace{\int f'(x)\,dx}_{\text{تكامل مشتقة الدالة}} = \int m(x)\,dx$$

لإيجاد معادلة المنحني من معادلة ميل المماس عند نقطة تنتمي له نتبع الخطوات الأتية:

1. نكامل معادلة الميل للحصول على دالة المنحني.
2. نعوض نقطة التماس في دالة المنحني لنستخرج قيمة c.
3. نعوض c في دالة المنحني.

مثال 13

إذا كانت معادلة ميل المماس لمنحني عند كل نقطة (x, y) من نقاطه $m(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ، فجد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (2,3).

الحل

معادلة المنحني تمثل تكامل معادلة ميل المماس:

$$y = \int m(x)\,dx$$

$$y = \int 3x^2 - 2x + 1\;\,dx$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$ (قيمة c مجهولة في معادلة المنحني)

∵ المنحني يمر بالنقطة (2,3) فهي تحقق المعادلة:

$3 = (2)^3 - (2)^2 + 2 + c$ $\Longleftarrow$ (نعوض النقطة لإيجاد قيمة c)

$$3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$3 = 6 + c$$

$$c = -3$$

نعوض c قيمة في معادلة المنحني:

(معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = x^3 - x^2 + x - 3$

مثال 14

جد معادلة المنحني المار بالنقطة $(1,3)$ ومعادلة ميل المماس له عند أي نقطة من نقاطه $m(x) = 3x^2 - 10x$.

الحل

$$y = \int m\,(x)\,dx$$

$$y = \int (3x^2 - 10x)\;dx$$

$y = \ x^3 - 5x^2 + c$ (قيمة c مجهولة في معادلة المنحني)

$\because$ المنحني يمر بالنقطة $(\mathbf{1},\mathbf{3})$ فهي تحقق المعادلة:

(نعوض النقطة لإيجاد قيمة c)$\Longrightarrow$ $3 = 1^3 - 5(1)^2 + c$

$$3 = 1 - 5 + c$$

$$3 = -4 + c$$

$$c = 7$$

نعوض c قيمة في معادلة المنحني:

(معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = x^3 - 5x^2 + 7$

مثال 15

جد معادلة المنحني الذي معادلة ميله عند أي نقطة (x, y) من نقاطه $m(x) = 2x - 4$ ، وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3).

الحل

بما أن للمنحني نهاية صغرى فلإيجاد احداثياتها نصفر المشتقة $(f'(x) = 0)$

$2x - 4 = 0 \implies x = 2$, $y = -3$ (معطى)

$\therefore$ $(2, -3)$ نهاية صغرى للمنحني فهي تقع على المنحني

(نجد معادلة المنحني)$\implies$ $y = m(x)dx$

$$y = \int (2x - 4)\ dx$$

$y = x^2 - 4x + c$ (قيمة c مجهولة في معادلة المنحني)

$\because$ المنحني يمر بالنقطة $(2, -3)$ فهي تحقق المعادلة:

(نعوض النقطة لايجاد قيمة c)$\implies$ $-3 = (2)^2 - 4(2) + c$

$$-3 = 4 - 8 + c$$

$$-3 = -4 + c$$

$$c = 1$$

نعوض c قيمة في معادلة المنحني:

(معادلة المنحني)$\implies$ $y = x^2 - 4x + 1$

في المثال أعلاه نلاحظ انه إذا اعطانا نهاية صغرى في السؤال واردنا إيجاد احداثياتها فنقوم بتصفير مشتقة الدالة ومن ثم إيجاد قيمة x . و هذه الكلام ينطبق أيضا فيما لو اعطانا نهاية عظمى في السؤال.

مثال 16

إذا كان للمنحني $f(x)$ نهاية صغرى محلية قيمتها 6 ومعادلة ميله عند أي نقطة من نقاطه هو $m(x) = 6x^2 - 12x$ فجد معادلة المنحني.

الحل

بما أن للمنحني نهاية صغرى فلإيجاد احداثياتها نصفر المشتقة $(\underbrace{m(x) = f'(x)} = 0)$

ميل المستقيم المماس
يساوي مشتقة الدالة

$6x^2 - 12x = 0$

$(6x^2 - 12x = 0) \div 6$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

أما $x = 0$ أو $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $y = 6$ (معطى)

وعند تدقيق إشارة $f'(x)$ على خط الاعداد يتبين ان للدالة نهاية صغرى محلية عند $x = 2$

أي ان نقطة النهاية الصغرى هي $(2,6)$ وهي تحقق المعادلة أي أن:

(نجد معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = \int f'(x)dx$

$y = \int (6x^2 - 12x)\, dx$

$y = 2x^3 - 6x^2 + c$ (قيمة c مجهولة في معادلة المنحني)

(نعوض النقطة لإيجاد قيمة c)$\Longrightarrow$ $6 = 2(2)^3 - 6(2)^2 + c$

$6 = 16 - 24 + c$

$6 = -8 + c$

$c = 14$

نعوض قيمة c في معادلة المنحني:

(معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = 2x^3 - 6x^2 + 14$

مثال 17

جد معادلة المنحني الذي ميله عند اية نقطة (x, y) من نقطه هو $m(x) = x^2 - x - 2$ وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات.

الحل

بما أن للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات فان $(y = 0)$ ولإيجاد احداثيات x نصفر المشتقة $(f'(x) = 0)$:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$ أو $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$, $y = 0$

وبتدقيق إشارة $f'(x)$ على خط الاعداد يتبين ان للدالة نهاية عظمى محلية عند $x = -1$

أي ان نقطة النهاية العظمى هي $(-1,0)$ وهي تحقق المعادلة أي :

(نجد معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = \int f'(x)dx$

$$y = \int (x^2 - x - 2)\, dx$$

$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$ (قيمة c مجهولة في معادلة المنحني)

نعوض النقطة $(-1,0)$:

(نعوض النقطة لإيجاد قيمة c)$\Longrightarrow$ $0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$

$$0 = \frac{-2-3+12}{6} + c$$

$$\boldsymbol{c = \frac{7}{6}}$$

نعوض c قيمة في معادلة المنحني:

(معادلة المنحني)$\Longrightarrow$ $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{7}{6}$

4.6.3 التطبيق الاقتصادي

عملية التكامل الغير محدد هي عكس عملية الاشتقاق ، حيث ان المشتقة الأولى لأية دالة اقتصادية بالنسبة لأي متغير تعطينا التغير الحدي ، لذا فانه بأجراء العملية العكسية لدالة التغير الحدي ينتج لدينا الدالة الاصلية ، فمثلا" تكامل التكلفة الحدية يعطينا التكلفة الكلية وتكامل الإنتاج الحدي يعطينا الإنتاج الكلي و هكذا وكما موضوح بالأمثلة:

ملاحظة7

(M دالة الايراد الحدي) $\xRightarrow{\text{تكامل}}$ (M' دالة الايراد الكلي)

مثال 18

اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M' = 8 - 6v - 2v^2$ حيث $\boldsymbol{v}$ حجم الإنتاج ، جد دالة الايراد الكلي ودالة السعر .

الحل

بما ان $M' = 8 - 6v - 2v^2$ دالة الايراد الحدي فان دالة الايراد الكلي M هي:

$$M = \int (8 - 6v - 2v^2)\, dv$$

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}v^3 + c$$

وعندما يكون حجم الإنتاج $v = 0$, $M = 0$ ، فإن $c = 0$ (أي ماينتج يباع)

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2}{3}\, v^3 = -\frac{2}{3}\, v^3 - 3v^2 + 8v$$ (دالة الايراد الكلي)

حيث ان الايراد $M =$ الكمية المباعة × السعر للوحدة

$\therefore$ فان دالة السعر:

$$\text{دالة السعر} = \frac{M}{\text{الكمية المباعة}}$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}v^3 - 3v^2 + 8v}{v} = \frac{v\left(-\frac{2}{3}v^2 - 3\text{v} + 8\right)}{v}$$

$$= \frac{-2}{3}v^2 - 3v + 8$$ (يفرض ان ما ينتج يباع)

ملاحظة8

(T دالة التكلفة الكلية) $\xRightarrow{\text{تكامل}}$ (T' دالة التكلفة الحدية)

مثال 19

إذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $T' = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الإنتاج ، جد دالة التكلفة الكلية علماً أن $T = 65$.

الحل

بما ان التكلفة الحدية $T' = 2 + 60v - 5v^2$ فان دالة التكلفة الكلية Tهي:

$$T = \int (2 + 60v - 5v^2)\, dv$$

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + c$$

فاذا كانت التكلفة الكلية = 65 عندما حجم الإنتاج $v = 0$(أي ما ينتج يباع) فان $c = 65$

$\therefore$ دالة الكلفة الكلية هي : $T = 2v + 30v^2 - \frac{5}{3}v^3 + 65$

تمارين (3-2)

س1) جد تكاملات كلا مما يأتي:

a) $\int_2^3 \frac{x^4-1}{x-1} dx$

b) $\int_1^2 (x^{-2} + 2x + 1) dx$

c) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2} dx$

d) $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\, dx$

e) $\int_{-1}^0 \frac{x^3-27}{x-3} dx$

س2) جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -2, x = 2$ حيث ان $y = f(x) = x^3 - 4x$.

س3) جد المساحة المحددة بمنحي الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1,1]$.

س4) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات.

س5) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

س6) جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,3]$.

س7) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t - 3)m/s$ احسب:

1-المسافة المقطوعة في الفترة [2,4].

2-الازاحة في الفترة [0,5].

س8) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 2t + 12$ جد : المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [1,3] الازاحة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية [1,3].

س9) جد معادلة المنحني الذي معادلة ميله عند (x, y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة $(1,3)$.

س10)جد معادلة المنحني الذي معادلة ميله عند (x, y) من نقاطه هي $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها 10.

س11)اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M' = 12 - 8v + v^2$ ، فأوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ماينتج يباع.

س12)جد معادلة المنحني الذي معادلة ميله عند أي نقطة من نقاطه يساوي $x\sqrt{x^2 + 9}$ ويمر بالنقطة $(0,7)$.

س13)اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $T' = 1000 - 5v$ ، حيث V حجم الإنتاج فأوجد دالة التكلفة مع العلم ان التكلفة الثابتة = 150.

الفصل الرابع
(علم الاحصاء والاحتمالية)
PROBABILITY AND STATISTICS

البنود

1-4 مصطلحات وتعاريف
2-4 مبدأ العد
3-4 التباديل والتوافيق
4-4 الإرتباط الخطي البسيط
5-4 الانحدار الخطي البسيط

الأهداف السلوكية

ينبغي على الطالب في نهاية هذا الفصل أن يكون قادراً على ما يأتي:-

- يتعرف على مفهوم الاحتمال واستخدامه في الحياة اليومية.
- يتعرف على المصطلحات والتعاريف المستخدمة في علم الاحتمال.
- يدرك مبدأ العد عن طريق الامثلة المرتبطة بالتعامل اليومي مع البيئة.
- يتعرف على مفهوم التباديل ويتقن قوانينه ويتمكن من حل مسائل عملية حوله.
- يتعرف على مفهوم التوافيق ويتقن قوانينه ويتمكن من حل مسائل عملية حوله.
- يدرك أهمية دراسة وتحليل العلاقة بين متغيرين إحصائيين.
- يتعرف على مفهوم الإرتباط الخطي البسيط ويتمكن من أيجاده.
- يتعرف على مفهوم الانحدار الخطي البسيط ويتمكن من أيجاده.

الفصل الرابع – علم الاحصاء والاحتمالية - Statistics and Probability

المقدمة

ان نظرية الاحتمالية (*Probability*) من النظريات الرياضية المهمة التي تتخصص في دراسة الحوادث والمتغيرات والمظاهر التي تتميز بعدم تأكد حدوثها. وكلمة (احتمال) هي كلمة كثيرة الاستخدام فمثلاً تستخدم من قبل خبراء الأرصاد الجوية عند سقوط الامطار او تقلبات الطقس والمناخ، وكذلك تستخدم من قبل خبراء البورصة باحتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة خلال موسم التداول لهذا اليوم. كما يحتمل الطالب نجاحه في امتحان ما ، وهكذا فان كلمة احتمال كثيراً ما يتم التداول بها ربما دون ادراك المعنى الحقيقي لها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، لا سيما عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمالية ، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

1.4. مصطلحات وتعاريف

1.1.4. التجربة العشوائية (*Random Experment*)

يمكن ان نعرف التجربة بانها الحالة التي يمكننا من خلالها ملاحظة نتيجة ما. وهناك نوعان اساسيان من التجارب.

أ. محددة (*Deterministic*)

اذا كانت نتائجها ثابتة عند اعادتها اكثر من مرة وبنفس الظروف كما في اعادة وزن قطعة ذهب في ميزان حساس.

ب. عشوائية (*Random*)

اذا كانت نتائجها تخضع لتأثيرات عشوائية، فاذا أعيدت التجربة العشوائية اكثر من مرة وبنفس الظروف فإنها سوف تعطي نتائج مختلفة في كل مرة، كما في رمي قطعة نقود اكثر من مرة فأننا سوف لا نحصل دائما على نفس الوجه، وبشكل عام فأن التجربة العشوائية هي عملية تحقيق شروط معينة بحيث يمكنها اعطاء ناتج واحد من بين اكثر من نتيجة ممكنة، وتجدر الإشارة الى ان نظرية الاحتمالية تتخصص بالتجارب العشوائية.

مثال 1

ان عملية رمي قطعة نقود (عملة معدنية) هي تجربة عشوائية ونتائجها اما ظهور وجه الصورة H او وجه الكتابة T.

مثال 2

ان رمي حجر النرد (*Dice*) هي تجربة عشوائية وان النتائج الممكنة لهذه التجربة ان يكون عدد النقاط على الوجه العلوي لقطعة النرد احد الارقام 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 أي يمكن تحديد جميع النتائج الممكنة لكن من غير الممكن تحديد نتيجة بعينها، لذا سميت هذه التجربة بالتجربة العشوائية.

مثال 3

ان عمر مصباح كهربائي معين هو تجربة عشوائية.

مثال 4

ان فحص فصيلة دم لشخص ما تجربة عشوائية نتائجها احد الرموز O, A, B, AB.

2.1.4. فضاء العينة $(Sample\ Space)$

فضاء العينة S هو مجموعة من النقاط أو العناصر التي تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربة ما حيث ان كل نتيجة تمثل بنقطة أو عنصر في فضاء العينة ، ويرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز الى عدد عناصره بالرمز $n(S)$.

مثال 5

يتكون فضاء العينة في عملية رمي قطعة نقود (عملة معدنية) من العنصرين H, T اي ان :

$$S = \{H, T\}$$

وعدد عناصر الفضاء

$$n(S) = 2$$

اما اذا رمينا قطعتين من النقود فأن فضاء العينة يتكون من اربعة عناصر ، اي ان

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

وعدد عناصر الفضاء

$$n(S) = 4$$

مثال 6

عند رمي حجر النرد $(Dice)$ مرة واحدة فأن فضاء العينة يتكون من 6 عناصر وهي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

وعدد عناصر الفضاء

$$n(S) = 6$$

مثال 7

لفحص عمر مصباح كهربائي معين، وكان t يمثل عمر المصباح فأن فضاء العينة يكون

$$S = \{t : t \geq 0\}$$

وعدد عناصر الفضاء غير محدد.

مثال 8

عند فحص فصيلة دم لشخص ما فأن فضاء العينة يتكون من 4 عناصر وهي

$$S = \{A, B, AB, O\}$$

وعدد عناصر الفضاء

$$n(S) = 4$$

3.1.4. الحدث $(Event)$

الحدث E هو مجموعة جزئية من فضاء العينة S ، أي إن $E \subseteq S$.

مثال 9

يمكن ان تكون الحوادث في عملية رمي قطعة نقود (عملة معدنية) كالآتي:

$E_1 = \{H\}$

$E_2 = \{T\}$

$E_3 = \{H, T\}$

مثال 10

يمكن ان تكون الحوادث عند رمي حجر النرد $(Dice)$ مرة واحدة كالآتي:

ظهور الاعداد الفردية	$E_1 = \{1,3,5\}$
ظهور الاعداد الزوجية	$E_2 = \{2,4,6\}$
ظهور الاعداد الاقل من أو تساوي 4	$E_3 = \{1,2,3,4\}$
ظهور عدد يقبل القسمة على 3	$E_4 = \{3,6\}$

مثال 11

يمكن ان تكون الحوادث عند فحص فصيلة دم لشخص كالآتي:

أن يكون صنف الدم للشخص O	$E_1 = \{0\}$
أن يكون صنف الدم للشخص أما B أو A	$E_2 = \{A, B\}$
أن لا يكون صنف الدم للشخص B	$E_3 = \{A, O, AB\}$

مثال 12

يمكن ان تكون الحوادث لفحص عمر مصباح كهربائي معين، وكان t يمثل عمر المصباح كالآتي:

ان لا يقل عمر الجهاز عن 5 سنوات $S = \{t: t \geq 5\}$

ان عمر الجهاز اقل من 3 سنوات $S = \{t: 0 < t < 3\}$

ان عمر الجهاز بين 4 و 6 سنوات $S = \{t: 4 \leq t \leq 6\}$

4.1.4. الحوادث المتنافية (*Mutually Events*)

يقال للحدثين E_1, E_2 انهما **متنافيان (مستبعدان)** اذا استحال حدوثهما معاً.

فمثلاً: عند رمي قطعة نقود معدنية من المستحيل الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت.

فاذا كانت $E_1, E_2, \dots, E_n$ هي حوادث متنافية فأن :

$$E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n = \emptyset$$

5.1.4. الحوادث المستقلة (*Independent Events*)

هي الحوادث التي اذا وقع احدها لا يؤثر على وقوع الاحداث الاخرى.

فمثلاً: عند رمي قطعتي نقود فالحصول على صورة في القطعة الاولى لا يؤثر في نتيجة القطعة الثانية.

6.1.4. الحوادث غير المستقلة (*Non Independent Events*)

هي الحوادث التي إذا وقع أحدها يؤثر على وقوع الاحداث الاخرى.

فمثلاً: في حالة صندوق يحتوي على كرات بيضاء وسوداء فعند سحب كرتان على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الاولى فأن نتيجة السحبة الثانية تتأثر بنتيجة السحبة الاولى.

7.1.4. الاحداث الشاملة

لتكن E_3 , E_2 , E_1 احداث من فضاء العينة S، يقال لهذه الاحداث شاملة إذا حققت الشروط الآتية:

1. اتحاد الاحداث يساوي فضاء العينة (S).
2. تقاطعهما (مثنى مثنى) (أي كل أثنين معاً) يساوي مجموعة خالية (ϕ).
3. كل مجموعة منها ليست خالية.

مثال 13

ليكن $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نأخذ بعض الاحداث من S

$E_1=\{1,4\}$ حدث مركب $(Compound\ Event)$ لان عدد عناصره أكبر من 1.

$E_2=\{3\}$ حدث بسيط $(Simple\ Event)$ لأنه يحتوي عنصراً واحداً فقط.

$E_3=\{6\}$ حدث بسيط

$E_4=\{1,2,3,4,5\}$ حدث مركب

E_5 حدث يمثل الحصول على عدد يقبل القسمة على 5 و 2 في نفس الوقت

لكن $E_5=\phi$ اي انه حدث مستحيل $(Impossible\ Event)$

$E_6=\{5 ، 2\}$ حدث مركب

$E_7=\{2,3,5,6\}$ حدث مركب

$E_8=\{1,2,3,4,5,6\}$ حدث مؤكد $(Sure\ Even)$

نلاحظ E_7 و E_1 أحداث شاملة من S.

8.1.4. العمليات على الحوادث

1. $E\subseteq S$ معناه E حدث من S
2. ϕ تسمى بالحدث المستحيل (الحدث الذي لا يمكن وقوعه)
3. S تسمى فضاء العينة = الحدث المؤكد (يقع دائما)
4. $E^C=S-E$ يسمى الحدث المكمل للحدث E = $E^C\ (Complement\ Event)$
5. $E_1\cup E_2$ يعني وقوع الحدث E_1 أو E_2 اي وقوع احد الحدثين على الأقل.
6. $E_1\cap E_2$ يعني وقوع الحدث E_1 و E_2 اي وقوع الحدثين معاً
7. $E_1\subseteq E_2$ يعني وقوع الحدث E_1 يستلزم وقوع الحدث E_2
8. $E_1,E_2 \Leftrightarrow E_1\cap E_2=\phi$ حدثين متنافيين $(Mutually\ Events)$
9. الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى حدث بسيط.
10. الحدث الذي يتكون من عنصرين او اكثر يسمى حدث مركب.
11. نسبة احتمال وقوع الحدث $P(E)$ هو ناتج القسمة بين عدد عناصر الحدث وعدد عناصر فضاء العينة أي:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

ملاحظة1

إذا كانت تجربة مركبة من تجربتين متتاليتين وكان فضاء التجربة الاولى S1 والثانية S2 فان:

1. فضاء العينة للتجربة المركبة يساوي $S_1 \times S_2$ (حاصل الضرب الديكارتي)
2. $n(S) = n(S_1) \times n(S_2)$ (مبدأ العد)

(علماً أن العناصر ستكون بشكل ازواج مرتبة)

مثال 14

إن تجربة القاء حجري نرد وقطعة نقود وحجر نرد مرة أخرى هي تجربة مركبة من التجارب الثلاث الاتية:

$S_1 = \{1،2،3،4،5،6\}$ حجر النرد الاول

$S_2 = \{H، T\}$ حيث H الصورة Tالكتابة

$S_3 = \{1،2،3،4،5،6\}$ حجر النرد الثاني

وعليه يكون $S = S_1 \times S_2 \times S_3$ (يمثل فضاء العينة للتجربة المركبة)

ويكون عدد عناصر فضاء العينة للتجربة المركبة

$S = \{(1, H, 1), (1, H, 2), \dots, (6, T, 6)\}$, $n(S) = n(S_1) \times n(S_2) \times n(S_3)$

$n(S) = 6 \times 2 \times 6 = 72$

مثال 15

صندوق يحتوي اقراصاً مرقمة من 10 الى 21 سحب منها قرص واحد، جد نسبة احتمال كون هذا القرص يحمل عددا زوجياً او عدداً يقبل القسمة على 3 بدون أي باق.

الحل

$S = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$

$n(S) = 21 - 10 + 1 = 12$ (فضاء العينة يحوي 12 عنصر)

ليكن Aحدث كون القرص المسحوب يحمل عدداً زوجياً أي:

$A = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

ويكون عدد عناصر الحدث A :-

$n(A) = 6$

وليكن $P(A)$ نسبة احتمال وقوع الحدث A اي ان :-

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12}$$

ليكن B حدث كون القرص المسحوب يحمل عدداً يقبل القسمة على 3 بدون باقٍ:

$$B = \{12, 15, 18, 21\}$$

ويكون عدد عناصر الحدث :-

$$n(\mathrm{B}) = 4$$

وليكن $P(B)$ نسبة احتمال وقوع الحدث B اي ان :-

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12}$$

$$A \cap B = \{12, 18\}$$

$$P[A \cap B] = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12}$$

$$P[A \cup B] = P(A) + P(B) - P[A \cap B]$$

$$P[A \cup B] = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12}$$

$$P[A \cup B] = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

مثال 16

شركة يعمل فيها 60 رجلاً و 20 امرأة، وكان 35 من الرجال متزوجون و 12 من النساء متزوجات، اختير شخص واحد عشوائياً من هذه الشركة ، جد احتمال ان يكون:

(1) هذا الشخص رجلاً. (2) هذا الشخص إمرأة غير متزوجة.

الحل:

عدد عناصر فضاء العينة:

$$n(\mathrm{S}) = 60 + 20 = 80$$

(1) ليكن A حدث كون الشخص الذي تم إختياره رجلاً:

$$P(A) = \frac{n(\mathrm{A})}{n(\mathrm{S})} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$$

(2) ليكن B حدث كون الشخص الذي تم إختياره إمرأة غير متزوجة:

$$n(8) = 20 - 12 = 8$$

$$P(B) = \frac{n(\mathrm{B})}{n(\mathrm{S})} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

مثال 17

القي حجرا نرد متمايزان سوية مرة واحدة ، جد احتمال ان يكون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 10 أو مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9 ، وما هي احتمالية تقاطع واتحاد الحدثين.

الحل:

عدد عناصر فضاء العينة:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ليكن A حدث كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين $= 10$:

$$A = \{(5,5),(4,6),(6،4)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36}$$

ليكن B حدث كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين $= 9$:

$$B = \{(5,4),(4,5),(6،3),(3,6)\}$$

$$P(B) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

وحيث ان $A \cap B = \{\phi\}$ فان:

$$P[A \cap B] = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$$

$$P[A \cup B] = P(A) + P(B) - P[A \cap B]$$

$$P[A \cup B] = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} - 0 = \frac{7}{36}$$

مثال 18

رمينا حجري نرد سوية مرة واحدة، ما احتمال ان يكون العدد على وجه أحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الآخر او العددان على الوجهين الظاهرين مجموعهما 6 ، وما هي احتمالية تقاطع واتحاد الحدثين.

الحل:

عدد عناصر فضاء العينة:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

ليكن A هو حدث كون العدد على الوجه الظاهر لاحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الآخر.

$$A = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,2), (2,1), (6,3)\}$$

$$n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36}$$

ليكن B هو حدث كون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 6:

$$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$n(B) = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

$$A \cap B = \{(2,4)،(4,2)\}$$

$$P[A \cap B] = \frac{2}{36}$$

$$P[A \cup B] = P(A) + P(B) - P[A \cap B]$$

$$P[A \cup B] = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

2.4. مبدأ العد

إذا كان لدينا عملية ممكن إجراؤها بطرق مختلفة عددها (m) وكان لدينا في الوقت نفسه عملية اخرى يمكن اجراها بطرق عددها (n) فان عدد الطرق التي يمكن بها اجراء العمليتين معاً يساوي $m \times n$.

مثال 19

يوجد لدى صاحب مخزن ثلاثة انواع من الدراجات الهوائية ومن كل نوع يوجد اربعة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات؟

الحل:

نستخرج عدد الدراجات باستعمال مبدأ العد وكما يأتي:-

عدد الدراجات $= 3 \times 4 \times 6 = 72$ دراجة

مثال 20

كم عدداً رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إذا كان تكرار الرقم نفسه في العدد :

a. مسموح به.

b. غير مسموح به.

الحل:

a. التكرار مسموح به

عدد طرق اختيار الرقم الأول $= 6$

عدد طرق اختيار الرقم الثاني $= 6$

عدد طرق اختيار الرقم الثالث $= 6$

عدد الأعداد $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ عدد

b. التكرار غير مسموح به

عدد طرق اختيار الرقم الأول $= 6$

عدد طرق اختيار الرقم الثاني $= 5$

عدد طرق اختيار الرقم الثالث $= 4$

عدد الأعداد $= 6 \times 5 \times 4 = 120$ عدد

مثال 21

كم عدداً رمزه مكون من رقمين وأصغر من 40 يمكن تكوينه باستخدام الارقام $\{1,2,3,4,5\}$
إذا كان تكرار الرقم نفسه في العدد :

a. مسموح به. b. غير مسموح به

الحل:

a. التكرار مسموح به

عدد طرق اختيار رقم العشرات $= 3$

عدد طرق اختيار الرقم الاحاد $= 5$

عدد الأعداد $= 3 \times 5 = 15$ عدد

b. التكرار غير مسموح به

عدد طرق اختيار رقم العشرات $= 3$

عدد طرق اختيار الرقم الاحاد $= 4$

عدد الأعداد $= 3 \times 4 = 12$ عدد

مثال 22

كم عدداً مكون من ثلاث مراتب وأكبر من 500 يمكن تكوينه من الارقام $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ إذا كان تكرار الرقم نفسه في العدد : a. مسموح به. b. غير مسموح به

الحل:

a. التكرار مسموح به

عدد طرق اختيار رقم المئات $= 3$

عدد طرق اختيار رقم العشرات $= 7$

عدد طرق اختيار رقم الأحاد $= 7$

عدد الأعداد $= 3 \times 7 \times 7 = 147$ عدد

b. التكرار غير مسموح به

عدد طرق اختيار رقم المئات $= \mathbf{3}$

عدد طرق اختيار رقم العشرات $= \mathbf{6}$

عدد طرق اختيار رقم الأحاد $= \mathbf{5}$

عدد الأعداد $= 3 \times 6 \times 5 = 90$ عدد

3.4. التباديل والتوافيق

يطلق مسمى **توافقيات** على ذلك الفرع من الرياضيات الذي يتناول التباديل والتوافيق. وللتباديل استخدامات عديدة تشمل تحويل المكالمات الهاتفية عبر الأسلاك، وجدولة الإنتاج في المصانع. ومع استخدام الحاسوب، غدت التباديل مجالا خصبا للأبحاث، وذلك لسرعة الحاسوب في القيام بالحسابات المتكررة. وكثيرا ما نحتاج في حياتنا الخاصة الى معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب مجموعة من الاشياء سواء بشروط أو بدون شروط، ودراسة التباديل والتوافيق قد تساعدنا في التعرف على طريقة الحساب الخاصة بتحديد عدد طرق الترتيب.

1.3.4. مضروب العدد $(Factorial)$

مضروب (مفكوك) العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب جميع الأرقام الصحيحة الأصغر من او تساوي العدد n. ويرمز له بالرمز $n!$.

ولإيجاد المفكوك نستعمل القانون:

$$\underbrace{\boldsymbol{n!}}_{\text{مضروب العدد}} = \boldsymbol{n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

مثال 23

جد قيمة كل مما يأتي: $5!\,,\,6!\,,\,3!$

الحل:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ملاحظة2

$$1! = 1$$

مثال 24

أثبت أن: $0! = 1$

الحل:

$$n! = n(n-1)!$$

نفرض ان $n = 1$:

$$1! = 1 \times (1-1)!$$
$$1 = 1 \times 0!$$
$$0! = 1$$

مثال 25

جد قيمة (n) اذا كان : $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$

الحل:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30 \Rightarrow \frac{(n+1)\times n\times(n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1)\times n = 30$$

$$n^2+n-30=0 \quad \Rightarrow (n-5)(n+6)=0$$

اما $n-5=0 \Rightarrow n=5$ أو $n+6=0 \Rightarrow n=-6$

نهمل القيمة السالبة (-6) حيث ان n عدداً صحيحاً موجباً.

مثال 26

إذا كان $n! = 5040$ فما قيمة n.

الحل:

نلاحظ في هذا السؤال أن العملية عكسية حيث المعطى هو ناتج مضروب العدد n والمطلوب هو إيجاد العدد n ، وفي هذه الحالة نقوم بتحليل الناتج للتوصل للعدد :

$$n! = 5040$$

$$n! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$n! = 7!$$

$$n = 7$$

2	5040
3	2520
4	840
5	210
6	42
7	7
	1

2.3.4. التباديل $(Permutation)$

هي عدد طرق اختيار عيّنة عدد عناصرها r من مجتمع عدد عناصره n علماً أن الترتيب مهم في هذا الاختيار ويرمز للتباديل بالرمز P_r^n أو $P(n,r)$ ويقرأ تباديل r من n ويحسب كالآتي:

العنصر الاول نستطيع إختياره بـ (n) من الطرق

العنصر الثاني نستطيع إختياره بـ ($n-1$) من الطرق

العنصر الثالث نستطيع إختياره بـ ($n-2$) من الطرق

وهكذا الى العنصر الذي تسلسله (r) نستطيع اختياره بـ ($n-r+1$) من الطرق

وعليه تكون عدد الطرق الكلية لاختيار (r) من العناصر من مجتمع عدد عناصره (n) مع **مراعاة الترتيب** هو :-

$$P_r^n = P(n،r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_r^n = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

قوانين التباديل

1) $P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots\times 1$

2) $P_0^n = 1$

3) $P_1^n = n$

4) $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

5) $P_r^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

احسب: P_3^8

الحل:

حسب القانون الرابع:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \Longrightarrow P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = 336$$

أو حسب القانون الخامس: (وفكرته هي ضرب العدد n تنازليا بعدد مرات r)

$$P_3^8 = \underbrace{8\times7\times6}_{\text{ضرب العدد 8 تنازليا بعدد مرات 3}} = 336$$

احسب: P_4^4

الحل:

حسب القانون الأول:

$$P_n^n = n! \quad \Longrightarrow P_4^4 = 4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$

احسب: P_0^5

الحل:

حسب القانون الثاني:

$$P_0^n = 1 \Longrightarrow P_0^5 = 1$$

أو حسب القانون الرابع:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \Longrightarrow P_0^5 = \frac{5!}{(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

مثال 30

جد عدد التباديل للحروف $A \ , \ B \ , \ C$ المأخوذة منها اثنان في كل مرة ، مع مراعاة الترتيب.

الحل:

عدد الحروف 3 ونريد أن ناخذ منها 2 لذلك فأن الرقم الكبير يمثل n والرقم الصغير يمثل r

(نعوض $n = 3 \ , r = 2$) $\Longrightarrow \ P_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!}$

$$= \frac{3 \times 2 \times 1}{1!} = 6$$

مثال 31

ما عدد طرق توزيع **4** اشخاص على اربع وظائف شاغرة بحيث يكون لكل شخص فرصة عمل متساوية مع الاخرين؟ (هنا الترتيب مهم).

الحل:

هنا لدينا عدد الطرق 4 و عدد الوظائف 4 متساويان

(نعوض $n = 4 \ , r = 4$) $\Longrightarrow \ P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!}$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!} = 24$$

وبالإمكان أيضا استخدام القانون الأول لحل نفس السؤال

مثال 32

بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل أن يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم فيه سبعة مقاعد (هنا الترتيب مهم).

الحل:

عدد الاشخاص 7 و عدد المقاعد 7 متساويان

(نعوض $n = 7 \ , r = 7$) $\Longrightarrow \ P_7^7 = \frac{7!}{(7-7)!}$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!} = 5040$$

وبالإمكان أيضا استخدام القانون الأول لحل نفس السؤال

مثال 33

جد قيمة (n) إذا كان $P_2^n = 90$.

الحل:

$$P_2^n = 90$$

(نطبق قانون التباديل)$\Longrightarrow \quad \frac{n!}{(n-2)!} = 90$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 90$$

$$n(n-1) = 90$$

$n^2 - n = 90$ (نصفر)

$n^2 - n - 90 = 0$ (تجربة)

$$(n-10)(n+9) = 0$$

أما $n - 10 = 0 \Longrightarrow n = 10$ أو $n + 9 = 0 \Longrightarrow n = -9$ (يهمل لأنه سالب)

ملاحظة3

قيمة n و r دائما موجبة ويُهمل الحل اذا كانت سالبة

3.3.4. التوافيق $(Combinations)$

هي عدد طرق إختيار عيّنة عدد عناصرها (r) من مجتمع عدد عناصره n علماً أن الترتيب غير مهم في هذا الاختيار ويرمز للتوافيق بالرمز C_r^n أو $C(n ، r)$ أو $\binom{n}{r}$ ويحسب كالآتي: -

عدد تباديل r من n هو P_r^n، عدد تباديل r من r هو $P_r^r = r!$ ويمثل عدد الطرق المتشابهة من حيث العناصر والمختلفة بالترتيب فقط لكل أختيار r من n.

وبذلك تكون عدد الطرق الكلية لاختيار r من العناصر من مجتمع عدد عناصره n مع **عدم مراعاة الترتيب** هو: -

$$\boldsymbol{C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}}$$

قوانين التوافيق

1) $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!}$

2) $C_r^n = \frac{n!}{r!\times(n-r)!}$

3) $C_1^n = n$

4) $C_r^n = C_{n-r}^n$

5) $C_n^n = C_0^n = 1$

6) $C_r^n \leq P_r^n$

مثال 34

احسب كل من C_2^5 و C_3^8.

الحل:

$$C_r^n = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

(نطبق قانون التوافيق) $\Longrightarrow C_2^5 = \frac{5!}{2!\times(5-2)!}$

$$= \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1} = 10$$

(نطبق قانون التوافيق) $\Longrightarrow C_3^8 = \frac{8!}{3!\times(8-3)!}$

$$= \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!} = 56$$

كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من ستة اشخاص (هنا الترتيب غير مهم).

الحل:

العدد الأكبر عدد الأشخاص يمثل n والعدد الأصغر و هو عدد اللجان يمثل r :

$$(\text{نعوض } n=6\,, r=3) \Longrightarrow C_3^6 = \frac{6!}{3!\times(6-3)!}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3!}{3\times2\times1\times3!} = 20 \ (\text{لجنة})$$

إذا كان عدد اسئلة امتحان الرياضيات هو (8) والمطلوب حل (5) اسئلة فقط، بكم طريقة يمكن الاجابة؟ (هنا الترتيب غير مهم)

الحل:

العدد الأكبر عدد أسئلة الامتحان يمثل n والعدد الأصغر و هو عدد الأسئلة الواجب حلها يمثل r :

$$(\text{نعوض } n=8\,, r=5) \Longrightarrow C_5^8 = \frac{8!}{5!\times(8-5)!}$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times3\times2\times1} = 56 \ (\text{طريقة اجابة})$$

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين 7 رجال و 5 سيدات (الترتيب غير مهم).

الحل:

عدد طرق اختيار 3 رجال من 7 هو C_3^7 وعدد طرق اختيار سيدتين من 5 هو C_2^5 ، ولذلك يكون عدد طرق اختيار اعضاء اللجنة الخمسة هو: $C_3^7 \times C_2^5$

$$(\text{عدد طرق الاختيار}) \Longrightarrow C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{3!\times(7-3)!} \times \frac{5\times4\times3\times2!}{2!\times(5-2)!}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \times \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}$$

$$= 35 \times 10 = 350 \ (\text{طريقة اختيار})$$

مثال 38

كيس فيه 10 كرات حمراء و 6 بيضاء سحبت منه 4 كرات معاً دون ارجاع، ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون.

الحل:

عدد طرق سحب 4 كرات حمراء من 10 هو C_4^{10} وعدد طرق سحب 4 كرات بيضاء من 6 هو C_4^{6} ولذلك تكون عدد الطرق الكلية لسحب أربع كرات من نفس اللون هو $C_4^{10}+C_4^{6}$

$$\text{(عدد طرق الاختيار)} \Longrightarrow C_4^{10}+C_4^{6}=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4!\times(10-4)!}+\frac{6\times5\times4!}{4!\times(6-4)!}$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{4\times3\times2\times1\times6!}+\frac{6\times5}{2\times1}$$

$$=210+15=225\ \text{(طريقة)}$$

تمارين (4-1)

1. في تجربة رمي قطعة نقود معدنية، احسب احتمال ظهور الصورة.
2. عند رمي حجر النرد مرة واحدة، اكتب الاحداث الآتية:
   a. ظهور عدد اولي.
   b. ظهور عدد زوجي.
   c. ظهور عدد فردي.
3. رمينا حجرين من أحجار النرد جد:-
   a. عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.
   b. اكتب فضاء العينة S.
   c. أكتب الحدث الذي فيه قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين أكبرأو يساوي 9.
   d. اكتب الحدث الذي قيمة العدد الذي على وجه أحد الأحجار ضعف العدد على الوجه الاخر.
   e. اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين يقبل القسمة على 6 دون باق.
4. في تجربة رمي حجر النرد اذا كان A هو ظهور العدد الزوجي، B هو ظهور العدد 2 او 5، جد P(A) ، P(B) ، P(A ∪ B) ، P(A ∩ B).
5. في تجربة رمي ثلاث قطع نقود سوية، اذا كانت الحوادث A هو ظهور جميع الاوجه صورة، B جميع الاوجه متشابهه، C ظهور صورة واحدة فقط. احسب الاحتمالات الآتية:
   a. $P(A\cup B)$.
   b. $P(A\cup C)$.
   c. $P(B\cup C)$.
   d. $P(A\cup B\cup C)$.
6. رمي حجران متمايزان من أحجار النرد، ما احتمال:
   a. كون العددين الظاهرين هما 6.

b. الحصول على مجموع 7 أو 11.

7. كيس يحتوي على 20 كرة متجانسة في جميع عناصرها مرقمة من 1 الى 20، سحبت كرة واحدة، ما احتمال:
   a. كون العدد الذي تحمله الكرة اصغر من 9
   b. كون العدد الذي تحمله الكرة اكبر من 5
8. صندوق يحتوي على 21 قرص مرقم من 1 الى 20 سحب قرصان جد نسبة احتمال:
   a. القرصان كلاهما زوجيان
   b. القرص الاول زوجي والقرص الثاني فردي
9. لدينا 50 بطاقة مرقمة من 1 الى 50 ،سحبنا بطاقة واحدة عشوائياً جد نسبة احتمال:
   a. العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على 5
   b. العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على 7
   c. العدد على البطاقة المسحوبة يقبل القسمة على 5 او 7
10. يراد اختيار لجنة طلابية تتكون من ثلاثة اشخاص بين 12 طالب و 4 طالبات ما احتمال:
   a. أن تكون اللجنة جميعها طلاب
   b. أن يكون في اللجنة طالب واحد فقط
11. جد قيمة n إذا كان
   a. $P_2^n = 110$
   b. $P_5^n = 8P_4^n$
   c. $C_2^n = 55$
12. احسب قيمة: $\frac{1}{210}[P_3^7 + 8P_4^7]$
13. كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من حرفين يمكن تكوينها من كلمة (القدس) مع مراعاة الترتيب؟
14. يراد تشكيل لجنة من ستة اعضاء من بين 5 طلاب و 8 مدرسين، فبكم طريقة يمكن ان تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين دون مراعاة الترتيب؟
15. إذا كان عدد اسئلة امتحان مادة الاحصاء هو 10 اسئلة وكان المطلوب حل 7 اسئلة منها على ان تختار أربعة أسئلة من بين الاسئلة الخمسة الاولى، فبكم طريقة يمكن الاجابة مع مراعاة الترتيب؟
16. صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و 8 كرات بيضاء، سحبت 3 كرات معاً، جد عدد طرق

4.4. الارتباط والانحدار البسيط ($\textit{Simple Correlation and Regression}$)

في السنوات السابقة تم عرض بعض المقاييس الوصفية، مثل مقاييس النزعة المركزية والتشتت، وغيرها من المقاييس الأخرى والتي يمكن من خلالها وصف شكل توزيع البيانات التي تم جمعها عن متغير واحد، وسوف ننتقل من التعامل مع متغير واحد إلى التعامل مع متغيرين أو أكثر، وسوف نتناول دراسة وتحليل العلاقة بين متغيرين وسنرمز لهما x و y، فمثلاً قد يكون المتغير x هو عدد نباتات القطن في وحدة المساحة في حين المتغير y هو كمية المحصول الناتج، او قد يكون المتغير x هو المعدل الفصلي لطلبة فرع الفنون التطبيقية بينما المتغير y يمثل الدرجات النهائية لهم في مادة الرياضيات.

ان الغاية الاساسية من دراسة توزيع ذو متغيرين هي:

لقياس درجة العلاقة بين المتغيرين وهذا ما يسمى بالارتباط ($Carrelation$) او بمعنى آخر قياس مدى الترابط بين متغيرين مستقلين.

لتحديد العلاقة الحقيقية بين x و y ووضعها بشكل معادلة بحيث يمكن التنبؤ منها عن قيمة المتغير y بدلالة قيمة المتغير x وهذا ما يسمى بالانحدار $(Regeression)$

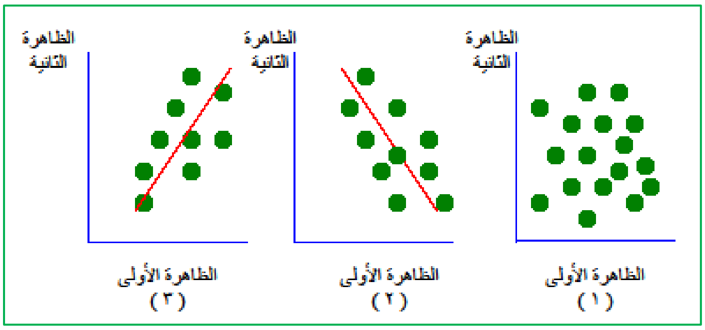
فإذا كان اهتمام الباحث هو دراسة العلاقة بين متغيرين استخدم أسلوب تحليل الإرتباط، وإذا كان اهتمامه بدراسة أثر أحد المتغيرين على الآخر استخدم أسلوب تحليل الانحدار، ومن الأمثلة على ذلك:

1. الإنفاق والدخل العائلي.
2. سعر السلعة والكمية المطلوبة منها.
3. الفترة الزمنية لتخزين الخبز وعمق طراوة الخبز.
4. درجة المعدل الفصلي للرياضيات ودرجة الامتحان النهائي.
5. كميات السماد المستخدمة وكمية الإنتاج من المحصول.
6. عدد مرات ممارسة نوع معين من الرياضة البدنية ومستوى الكولسترول في الدم.
7. وزن الجسم وضغط الدم.

1.4.4. الإرتباط الخطي البسيط $(Simple\ Linear\ Correlation)$

كما سبق الإشارة فإن الإرتباط يبحث في أتجاه وقوة العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر وأبسط أنواع الإرتباط هو الإرتباط الذي يبحث في قوة العلاقة بين ظاهرتين وهو موضوع دراستنا، فوجود إرتباط بين ظاهرتين يعني أنه إذا زادت قيم الظاهرة الأولى يتبعها زيادة أو نقصان في قيم الظاهرة الأخرى ويقال أن هناك إرتباطا طرديا أو موجبا في الحالة الأولى وإرتباطاً عكسيا أو سالبا في الحالة الثانية كما في الشكل(4-1) :-

1. لا توجد علاقة بين الظاهرتين.
2. علاقة عكسية بين الظاهرتين.
3. علاقة طردية بين الظاهرتين.



شكل(4-1) انواع العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين

الغرض من تحليل الإرتباط الخطي البسيط هو تحديد نوع وقوة العلاقة بين متغيرين، ويرمز له في حالة المجتمع بالرمز ρ (رو) وفي حالة العينة بالرمز r ، وحيث أننا في كثير من النواحي التطبيقية ، نتعامل مع بيانات عينة مسحوبة من المجتمع، فإننا سوف نهتم بحساب معامل الإرتباط في العينة كتقدير لمعامل الإرتباط في المجتمع، وبسبب هذا التحديد للغرض من دراسة معامل الإرتباط، نجد أنه يركز على نقطتين هما:

1) نوع العلاقة

وتأخذ ثلاث أنواع حسب إشارة معامل الإرتباط كما يلي:

a. إذا كانت إشارة معامل الإرتباط سالبة $(r < 0)$، توجد علاقة عكسية بين المتغيرين، بمعنى زيادة أحد المتغيرين يصاحبه انخفاض في المتغير الثاني وبالعكس.

b. إذا كانت إشارة معامل الإرتباط موجبة $(r > 0)$، توجد علاقة طردية بين المتغيرين، بمعنى زيادة أحد المتغيرين يصاحبه زيادة في المتغير الثاني وبالعكس.

c. إذا كان معامل الإرتباط قيمته صفرا $(r = 0)$ دل ذلك على انعدام العلاقة بين المتغيرين.

2) قوة العلاقة

ويمكن الحكم على قوة العلاقة من حيث درجة قربها او بعدها عن ± 1، حيث أن قيمة معامل الإرتباط تقع في المدى $(-1 < r < 1)$ ، وقد صنف بعض الاحصائيين درجات لقوة العلاقة على الشكل الآتي:

معامل الإرتباط الموجب	قوة الإرتباط
أقل من 0.29	ضعيف جداً
$0.3 - 0.49$	ضعيف
$0.5 - 0.69$	متوسط
$0.7 - 0.89$	قوي
$0.9 - 0.99$	قوي جداً
1	تام

ولحساب معامل الإرتباط في العينة، نستخدم احدى الصيغتين الآتيتين:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \times (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum X_i{}^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}\right)\left(\sum Y_i{}^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right)}}$$

مثال 39

احسب معامل الإرتباط للبيانات الآتية والتي تمثل طول وعرض ورقة (سم) نبات القطن:

عرض الورقة (x_i)	13	19	13	18	14	17	14	17	15	16
طول الورقة (y_i)	15	22	13	20	13	20	15	19	15	18

الحل:

x_i	y_i	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$	$x_i . y_i$
13	15	169	225	195
19	22	361	484	418
13	13	169	169	169
18	20	324	400	360
14	13	196	169	182
17	20	289	400	340
14	15	196	225	210
17	19	289	361	323
15	15	225	225	225
16	18	256	324	288
$\sum x_i = 156$	$\sum y_i = 170$	$\sum (x_i)^2 = 2474$	$\sum (y_i)^2 = 2982$	$\sum x_i . y_i = 2710$

$$r=\frac{\sum X_iY_i-\frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum X_i{}^2-\frac{(\sum X_i)^2}{n}\right)\left(\sum Y_i{}^2-\frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right)}}$$

$$r=\frac{2710-\frac{(156)(170)}{10}}{\sqrt{\left(2474-\frac{(156)^2}{10}\right)\left(2982-\frac{(170)^2}{10}\right)}}$$

$$r=\frac{2710-2652}{\sqrt{(2474-2433.6)(2982-2890)}}$$

$$r=\frac{58}{\sqrt{(40.4)(92)}}=\frac{58}{\sqrt{3716.8}}=\frac{58}{60.97}=0.95$$

وحيث أن معامل الإرتباط ($r = 0.95$) فأن ذلك يعني وجود علاقة طردية قوية بين طول وعرض الورقة.

مثال 40

احسب معامل الارتباط بين قيم x وقيم y أدناه:

قيم x	15	20	10	5	25
قيم y	8	6	7	10	4

الحل:

x_i	y_i	$(x_i)^2$	$(y_i)^2$	$x_i.y_i$
15	8	225	64	120
20	6	400	36	120
10	7	100	49	70
5	10	25	100	50
25	4	625	16	100
$\sum x_i=75$	$\sum y_i=35$	$\sum (x_i)^2=1375$	$\sum (y_i)^2=265$	$\sum x_i.y_i=460$

$$r=\frac{\sum X_iY_i-\frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}}{\sqrt{\left(\sum X_i{}^2-\frac{(\sum X_i)^2}{n}\right)\left(\sum Y_i{}^2-\frac{(\sum Y_i)^2}{n}\right)}}$$

$$r=\frac{460-\frac{(75)(35)}{5}}{\sqrt{\left(1375-\frac{(75)^2}{5}\right)\left(265-\frac{(35)^2}{5}\right)}}$$

$$r=\frac{460-525}{\sqrt{(1375-1125)(265-245)}}=\frac{-65}{\sqrt{(250)(20)}}=\frac{-65}{\sqrt{5000}}=\frac{-65}{70.71}=-0.92$$

وحيث أن معامل الارتباط ($r = -0.92$) فأن ذلك يعني وجود علاقة عكسية قوية بين قيم x وقيم y..

2.4.4. الأنحدار الخطي البسيط (Simple Linear Regression)

إن الغرض من استخدام أسلوب تحليل الانحدار الخطي البسيط، هو دراسة وتحليل أثر متغير كمي على متغير كمي آخر، ومن الأمثلة على ذلك ما يلي:

- دراسة أثر كمية السماد على إنتاجية الدونم.
- دراسة أثر الإنتاج على الكلفة.
- دراسة أثر كمية البروتين التي تتناولها الأبقار على الزيادة في الوزن.
- أثر الدخل على الإنفاق الاستهلاكي.

وهناك أمثلة في كثير من النواحي الاقتصادية والزراعية والتجارية، وفي تحليل الانحدار البسيط نجد أن الباحث يهتم بدراسة أثر أحد المتغيرين ويسمى بالمتغير المستقل أو المتنبأ منه، على المتغير الثاني ويسمى بالمتغير التابع أو المتنبأ به، ومن ثم يمكن عرض نموذج الانحدار الخطي في شكل معادلة خطية من الدرجة الأولى، تعكس المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل كما يلي :- $y = \alpha + \beta . x$ حيث أن:

y: هو المتغير التابع الذي يتأثر.

x: هو المتغير المستقل الذي يؤثر.

α (الفا) : وهو الجزء المقطوع من المحور y ، وهو يعكس قيمة المتغير التابع في حالة انعدام قيمة المتغير المستقل x ، اي في حالة $(x = 0)$.

β (بيتا) : ميل الخط المستقيم، ويعكس مقدار التغير في y إذا تغيرت x بمقدار وحدة واحدة. إن المعادلة أعلاه تسمى معادلة خط الانحدار للمجتمع وان α و β هما ثوابت.

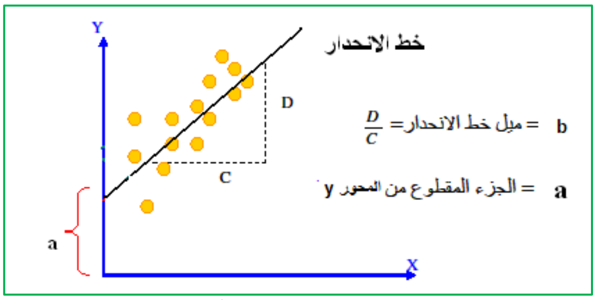
يعرف **الثابت α** بانه معدل قيمة y عندما x تساوي صفر وتسمى نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور y بالمقطع y أي $(y - Intercept)$ ويمكن تقدير α من العينة ويرمز لها a.

يعرف **الثابت بميل خط الانحدار للمجتمع** (ويسمى معامل انحدار y على x) بانه معدل التغير في y عندما تتغير قيمة x بقيمة واحدة وعند تقدير الميل من العينة يرمز له b.

وبذلك نمثل معادلة خط الانحدار للعينة بالمعادلة الآتية:

$$\boxed{y = a + bx}$$

ومن المعادلة اعلاه يمكن التنبؤ بقيمة y من قيم x عند معرفة الثوابت a و b ، وكما موضح في الشكل(4-2).



شكل(4-2) يمثل الانحدار الخطي مبيناً فيه كل من a و b

كيفية حساب معامل الانحدار b:-

يحسب معامل الانحدار أو ما يسمى ايضا ميل خط الانحدار b بواسطة المعادلة الآتية:

$$\boxed{b = \frac{\sum(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})}}$$

او يمكن استعمال المعادلة المختصرة الآتية:

$$b=\frac{\sum x_i.y_i-\frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum (x_i)^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

كيفية حساب معامل تقاطع خط الانحدار (a) مع المحور y

يمكن حساب معامل تقاطع خط الانحدار (a) مع المحور y بالمعادلة الآتية:

$$a=\overline{y}-b\overline{x}$$

استخدامات تحليل الانحدار

يستخدم تحليل الانحدار في المجالات الآتية :

1- وصف العلاقة الكمية بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

2- التنبؤ بقيم المتغير التابع عند مستويات محددة للمتغير المستقل.

3- السيطرة على المتغير التابع عن طريق التحكم بمستوى المتغير المستقل الذي يؤثر فيه.

مثال 41

اخذت عينة مكونة من 10 أسر، وكانت (x) تمثل عدد الاطفال بالاسرة، وتمثل (y) عدد غرف المسكن للاسرة ، وحصلنا على النتائج الآتية:

$\Sigma x_i=50 \quad \Sigma y_i=80 \quad \Sigma x_i{}^2=446 \quad \Sigma x_i y_i=180 \quad n=10$

احسب معادلة خط الانحدار ، ثم قدر عدد الغرف عندما يكون عدد اطفال الاسرة يساوي ستة اطفال.

الحل:

اولاً : نحسب قيمة b بإستخدام العلاقة:

$$b=\frac{\sum x_i.y_i-\frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum (x_i)^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}}=\frac{180-\frac{(50)(80)}{10}}{446-\frac{50^2}{10}}=\frac{180-400}{446-250}=\frac{-220}{196}=-1.12$$

ثانيا : نحسب قيمة a

$$a=\overline{y}-b\overline{x} \qquad \langle\ \overline{x}=\frac{50}{10}=5 \quad , \quad \overline{y}=\frac{80}{10}=8\ \rangle$$

$$a=8-(-1.12)\times 5=13.6$$

لذا تكون معادلة خط الانحدار :-

$$y=13.6-(1.12).x$$

ولتقدير عدد غرف الاسرة عندما يكون عدد الاطفال ستة ، نعوض بالمعادلة اعلاه :-

$$y=13.6-(1.12).(6)$$

$$y=6.88\cong 7$$

مثال 42

أوجد معادلة خط الانحدار y على x للبيانات الآتية:

3	2	1	0	x
10	8	6	4	y

الحل:

x_i	y_i	$x_i . y_i$	x_i^2	y_i^2
0	4	0	0	16
1	6	6	1	36
2	8	16	4	64
3	10	30	9	100
$\sum x_i = 6$	$\sum y_i = 28$	$\sum x_i . y_i = 52$	$\sum (x_i)^2 = 14$	$\sum (y_i)^2 = 216$

$$b = \frac{\sum x_i . y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}$$

$$b = \frac{52 - \frac{(6)(28)}{4}}{14 - \frac{6^2}{4}} = \frac{52-42}{14-9} = \frac{10}{5} = 2$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad \langle\ \bar{x} = \frac{6}{4} = 1.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{28}{4} = 7\ \rangle$$

$$a = 7 - 2 \times 1.5 = 4$$

لذا تكون معادلة خط الانحدار:-

$$y = 4 + 2x$$

تمارين (2-4)

1) تنحصر قيمة معامل الإرتباط دائماً بين:

a) غير محدود   b) بين 0 و 1   c) بين -1 و 1   d) بين 0 و -1

2) إذا كانت قيمة معامل الإرتباط 1.2 ، فهذا يعني:

a) هناك خطأ   b) الإرتباط طردي تام   c) الإرتباط عكسي   d) الإرتباط طردي

3) يسمى المتغير المطلوب تقديره (التنبؤ به) في معادلة الانحدار دائما:

a) المستقل   b) العشوائي   c) التابع   d) الوصفي

4. البيانات الواردة في الجدول الآتي تبين معدلات البطالة والطلاق في دولة ما خلال سنوات سابقة

a. على افتراض أن هناك علاقة خطية بين معدل البطالة في هذه الدولة (x) ومعدل الطلاق (y) حدد معادلة خط انحدار y على x ؟

b. قدر معدل الطلاق إذا وصل معدل البطالة 12%.

c. أحسب معامل الإرتباط بين الظاهرتين .

معدل البطالة (x)	5.0	5.2	4.9	7.3	6.5	10.5	10.8	8.5	8.0	6.5
معدل الطلاق (y)	2.5	2.4	3.1	4.3	3.8	5.0	4.8	4.1	8.3	2.8

5 . اوجد معادلة انحدار x على y من البيانات الآتية

x	-4	2	5	-2	1
y	6	10	15	7	8

6. إذا علمت بان:

$n = 10$	$\sum (y_i)^2 = 633$	$\sum (x_i)^2 = 200$	$\sum x_i . y_i = 350$	$\sum y_i = 75$	$\sum x_i = 40$

a. اوجد معادلة خط الانحدار

b. اوجد معامل الإرتباط