جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الثاني

الزراعي – فرع الفنون التطبيقية

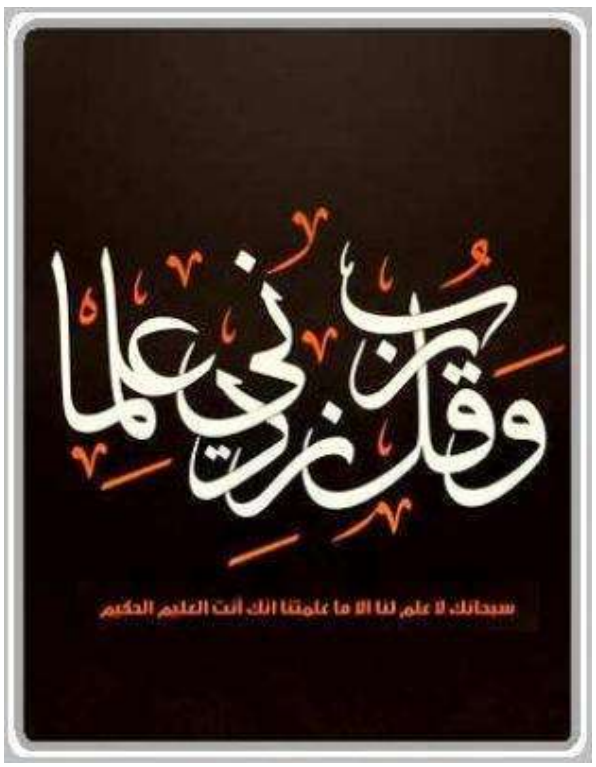
المؤلفون

د. فوزي عبدالحسين العبيدي **د. أياد غازي ناصر** **فؤاد عبدالحميد عبدالمجيد**

محمد عبد الغفور الجواهري **ثائر عبد العباس مطشر** **مهند عبد الحمزه مرزا**

نظير حسن علي

الطبعة السادسة **1446هـ - 2024م**


وقل رب زدني علما
سبحانك لا علم لنا الا ما علمتنا انك أنت العليم الحكيم

المقدمة

تهتم المديرية العامة للتعليم المهني منذ مدة ليست ببعيدة بإعادة النظر في الكتب المنهجية بهدف تطويرها وتعديلها أو استبدالها لتتماشى مع المستوى المتصاعد للمناهج في أرجاء المعمورة عامة.

وقد باشرت شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بخطوة أيجابية بأتجاه التكامل مع التجارب الدولية المتقدمة في المناهج الحديثة .وقد تمثلت الخطوة هذه بإعادة تأليف كتاب الرياضيات لغالبية فروع التعليم المهني ليسهم الكتاب الجديد في تأصيل المهارات الضرورية اللازمه لابنائنا الطلبة بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد وبالاستعانة بالتطبيقات والجداول والاشكال التي تدعم عملية اكتساب المهارات هذه.

وقد عملنا عند وضع الاهداف السلوكية لتدريس علم الرياضيات لفرع التعليم الزراعي والفنون التطبيقية أن تكون المفاهيم الرياضية معروضة في المنهج بطريقة مبسطة وبأستخدام عبارات سهلة وأمثلة بسيطة وقابلة للأستيعاب دون الشعور بالملل أو الأرهاق من صعوبة وجدية المادة الرياضية .

يقول الرياضي والمربي اليوغسلافي الشهير(زلاتكاشبورير *Zlatka Shporer*) في كتابــه ((الرياضيات في حياتنا)) ((لقد أصبحت الكتب المدرسية أكثر تجريداً ولذلك علينا إستخدام طريقة المسلمات الأساسية في عرض المفاهيم الرياضية)) كما يقول ((من أجل الرياضيات ليس من الضروري أن تكون مبتذلاً... ومن أجل العرض المبسط لاتوجد ضرورة لتفسير كل شي بسيط ... كما أن المدخل الجدي في الرياضيات يجب أن لا يكون مملاً بالضرورة)) . لذلك فقد عملنا على ألّاّ نضع في متن كتابنا هذا براهيناً مطولة أو وصفاً موسعاً للبنية الرياضية التي تضمنها الكتاب ، كما أن التكرارات الكثيرة للأمثلة في الكتاب مع المراجعة المستمرة إلى ما سبق وأن تمت دراسته في المراحل السابقة وأضافة شيء جديد له لايعد نقصاً في الكتاب بل نعده من أهم محاسنه.

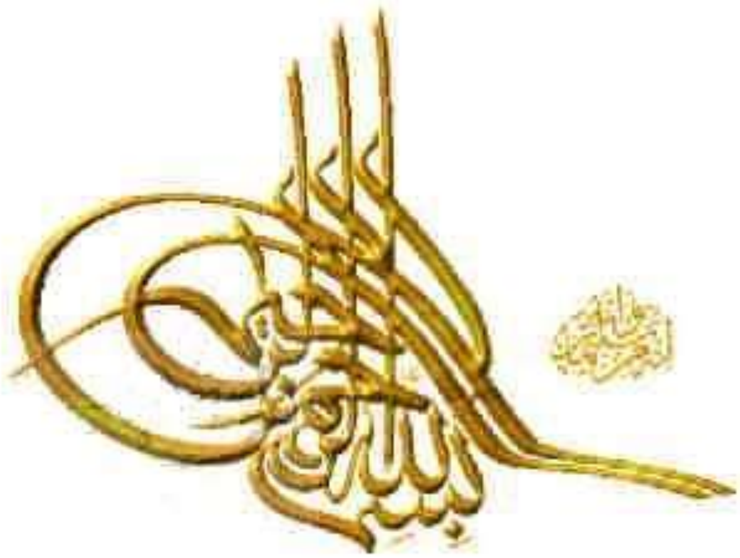
الكتاب هذا هو الكتاب الثاني من كتابين تم إعدادهما لطلبة المدارس الزراعية ويتألف من ثمانية فصول تبدأ بالفصل الأول الذي يتناول الأسس واللوغاريتمات ، أما الفصل الثاني فأنه يتناول الغاية والأستمرارية ويتناول الفصل الثالث حساب التفاضل ، فيما تناولت الفصول (4، 5، 6 ،7)علم الأحصاء بتتابع منسق يتيح للطالب تلمس طبيعة العلم هذا وأدراك ماهية مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت أو الأختلاف ومعاملات الأرتباط والأنحدار كما تناول موضوع مباديء نظرية الاحتمالات . أما الفصل الثامن الذي يبحث بالمصفوفات والمحددات فقد تمت أضافته ليتمكن الطالب من استخدامها في حل المعادلات الخطية. ومن الجدير بالذكر انه تم أضافة بند خاص معزز بالصور التوضيحية لاستخدام الحاسبة في أيجاد قيم النسب المثلثية واللوغاريتمات والاعداد المقابلة الى اللوغاريتمات وبذلك نكون قد سجلنا لكتابنا هذا السبق الاول حيث لم يسبق لكتاب منهجي في علم الرياضيات أن أستخدم مثل هذا الاسلوب المبتكر في إيصال المعلومة.

وهنا لا بد من الأشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل حصتين لكل أسبوع و ما مجموعه (25 أسبوعاً) .

الفصل الأول	أربعة أسابيع
الفصل الثاني	ثلاثة أسابيع
الفصل الثالث	أربعة أسابيع
الفصل الرابع	ثلاثة أسابيع
الفصل الخامس	ثلاثة أسابيع
الفصل السادس	أسبوعين
الفصل السابع	أسبوعين
الفصل الثامن	أربعة أسابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة للكاتب الذي يقول ((إني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده : لو غير هذا لكان أحسن ، ولو زيد كذا لكان يستحسن ، ولو قدم هذا لكان أفضل ، ولو ترك هذا لكان أجمل ، وهذا من أعظم العبر للانسان ، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)). آملين من أخواننا المدرسين أن يوافوننا ملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق .

المؤلفون



((من أراد أن يختبر عقله فعليه بالرياضيات ...ومن أراد أن ينميه فعليه بالرياضيات ... ومن أراد أن يصقل ذكاءه وموهبته فعليه بالرياضيات))

بعض المختصرات والرموز المستخدمة في الكتاب

1. $L.H.S = left\ hand\ side$: **الطرف الايسر**
2. $R.H.S = right\ hand\ side$: **الطرف الايمن**
3. $S.s = Solution\ set$:**مجموعة الحل**
4. $(x - axis)$: المحور الافقي
5. $(y - axis)$: المحور العمودي
6. $\mathbb{R}$: مجموعة الاعداد الحقيقية
7. $\mathbb{Q}$: مجموعة الاعداد النسبية
8. $\mathbb{Z}$: مجموعة الاعداد الصحيحة
9. $\mathbb{N}$: مجموعة الاعداد الطبيعية
10. $\forall$: لكل
11. $\exists$: يوجد على الاقل
12. $\in$: ينتمي
13. $\ni$: **بحيث**
14. $f(x)$: **الدالة**
15. Δx : **التغير في قيمة** x
16. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$: **الغاية عندما التغير في قيمة** x (أيΔx) **صغير ويقترب من الصفر**
17. $\frac{dy}{dx}$, y' , $f'(x)$: المشتقة الاولى
18. $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'', $f''(x)$: المشتقة الثانية
19. m : **ميل المماس** للمنحني

الفهرس

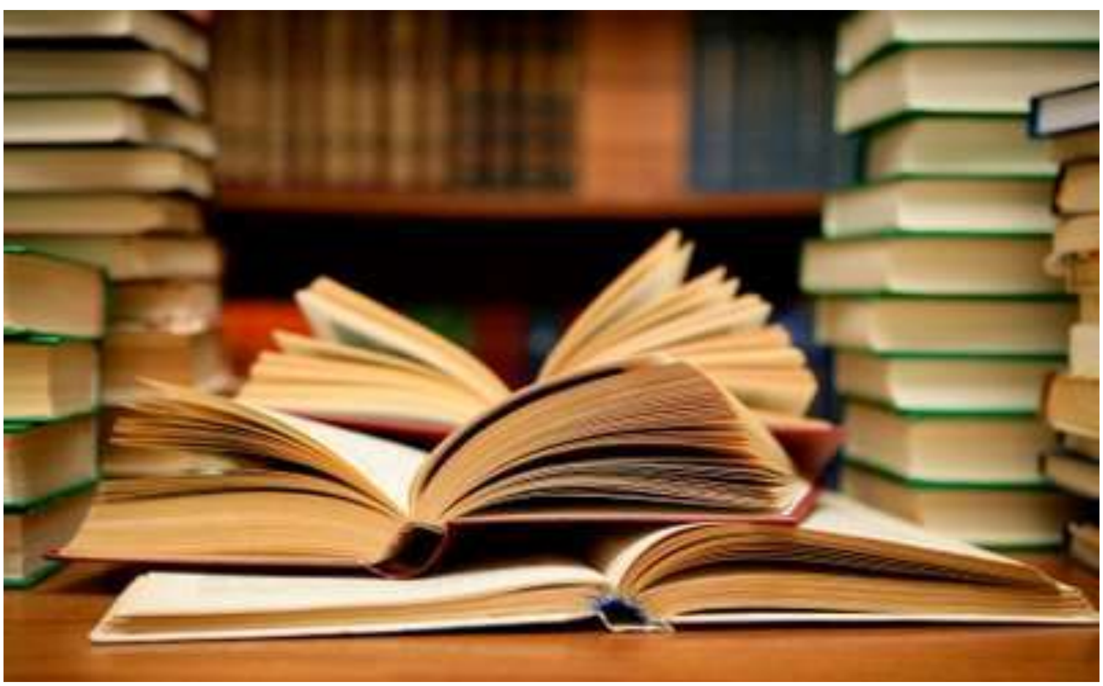
الموضوع	الصفحة

الفصل الخامس

علم الاحصاء- مقاييس النزعة المركزية

الفصل الاول

الأسس واللوغاريتمات



الفصل الاول
الأسس واللوغاريتمات

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا ان يكون قادراً على أن :-

1. يدرك ان مفهوم الأسس وجد للتعبير عن عملية الضرب المتكرر لعدد ما .
2. يتقن قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحه موجبة أو سالبة ويفهم معنى الأس الكسري.
3. يستخرج مجموعة الحل للمعادلات الأسية .
4. يميز الدالة الأسية ويستطيع تمثيلها بيانياً.
5. يدرك الحاجة لمفهوم اللوغاريتم ويتمكن من التحول من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية او بالعكس بسهولة .
6. يستطيع استخراج لوغاريتمات الأعداد لاي أساس .
7. يستوعب أسلوب إيجاد اللوغاريتمات العشرية للأعداد التي تمثل قوى صحيحة للعدد 10 .
8. يدرك الحاجة الى وجود اللوغاريتم الطبيعي (ln)وهو لوغاريتم للأساس e) ويتمكن من أدراك أن له خواص اللوغاريتم الاعتيادي ذاتها .
9. يستخرج مجموعة الحل لبعض المعادلات اللوغاريتمية .
10. يميز الدالة اللوغاريتمية ويستطيع تمثيلها بيانياً .

الفصل الأول
الأسس واللوغاريتمات

[1-1] الدالة الأسية .

[1-1-1] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة موجبة.

[1-1-2] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة .

[1-1-3] تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون أعداداً نسبية .

[1-1-4] الدالة الأسية - تمثيلها بيانياً – خواصها .

[1-1-5] المعادلات الأسية .

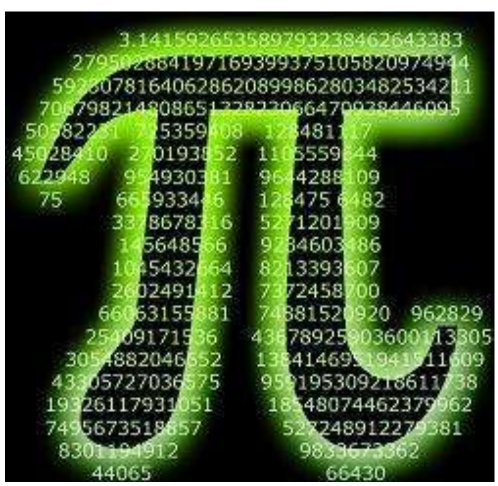
[1-2] الدالة اللوغاريتمية والقوانين الأساسية لها.

[1-2-1] الدالة اللوغاريتمية التي أساسها أعداد حقيقية .

[1-2-2] أهم خواص اللوغاريتمات .

[1-2-3] اللوغاريتمات العشرية .

[1-2-4] اللوغاريتمات الطبيعية.



[1-1] الدالة الأسية

تمهيد

سنقدم في البند هذا خلاصة للتعاريف والنظريات التي سبق وإن تعلمتها في المراحل السابقة حول الأسس حيث تعرفنا على مفهوم الأس عندما يكون عدداً صحيحا موجبا وذلك على سبيل المراجعة التي سيبنى عليها الفصل هذا حيث سنعالج كون الأسس أعداداً نسبية أو حقيقية .

الأسس :-

تعلمنا في دراستنا السابقة انه يمكننا التعبير عن الضرب المتكرر بطريقة مختصرة فمثلاً المقدار $3 \times 3 \times 3 \times 3$ يعبر عنه بالصيغة 3^4 فالعدد 4 يدل على عدد مرات ضرب العدد 3 في نفسه وتقرأ (3 أس 4) أو (القوة الرابعة للعدد 3) ويمكننا تعميم ذلك كما يلي :-

تعريف الأس :-

$\forall n \in Z, a \in \mathbb{R}: \quad a^n = a \times a \times a \times a \times$ ...الى n من المرات

ملاحظات :-

1. إذا كان $\boldsymbol{a}$ عدداً موجباً فإن $\boldsymbol{a^n}$ يكون عدداً موجباً في حالة كون الأس $\boldsymbol{n}$ فردياً أو زوجياً.
2. إذا كان $\boldsymbol{a}$ عدداً سالباً فإن $\boldsymbol{a^n}$ يكون:-
   - عدداً موجباً في حالة كون الأس $\boldsymbol{n}$ زوجياً .
   - عدداً سالباً في حالة كون الأس n فردياً .

مثال 1:- جد ناتج مايأتي :

1) $2^2 = 2 \times 2 = 4$
2) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
3) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$
4) $(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 64$

[1-1-1] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة موجبة

تعلمنا من دراستنا السابقة إن القوانين المدونة في أدناه تكون صائبة عندما تكون الأسس أعداداً صحيحة موجبة ،

أي إن: $\forall\ a\,,b\ \in \mathbb{R}\,, n,m\ \in \mathbb{Z}\,, a\ \neq 0\ \,, b \neq 0$

1. قانون ضرب الأسس: عند الضرب تجمع الأسس بشرط تساوي الأساسات

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

مثال 2:- جد ناتج مايأتي:

1) $x^3 . x^4 = x^{3+4} = x^7$

2) $5^3 . 5^2 . 5^1 = 5^{3+2+1} = 5^6$

3) $a^2 . b^4 . a^3 = a^{2+3} . b^4 = a^5 . b^4$

2. قانون   قسمة الأسس: عند القسمة تطرح الأسس بشرط تساوي الأساسات

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \forall\ m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \forall\ m < n \\ 1 & ، m = n \end{cases}$$

مثال 3:- جد ناتج مايأتي:

1) $\frac{a^{17}}{a^3} = a^{17-3} = a^{14}$

2) $\frac{b^6}{b^{12}} = \frac{1}{b^{12-6}} = \frac{1}{b^6}$

3) $\frac{x^3}{x^3} = 1$

مثال 4:- أكتب المقدار الآتي بأبسط صورة :- $\frac{x^3 . y^2 . x^4}{x^2 . y . y^5}$

الحل: $\frac{x^3 . y^2 . x^4}{x^2 . y . y^5} = \frac{x^7 . y^2}{x^2 . y^6} = \frac{x^5}{y^4}$

3. قانون رفع الأسس: عند الرفع تضرب الأسس

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m.n}\ ،\quad (a^n)^m = a^{n.m}}$$

كما يمكننا الأستنتاج مما سبق أن :-

$$1.\ (a^m)^n = (a^n)^m \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}\ ;\ m\ ,n\ \in \mathbb{N}$$

$$2.\ (a^m . b^n)^c = a^{mc} . b^{nc} \quad ,\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ ; a \neq 0, b \neq 0\ ;\ \ m, n, c \in \mathbb{N}$$

$$\mathbf{3.}\ \left(\frac{a^m}{b^n}\right)^c = \frac{a^{mc}}{b^{nc}} \quad , \quad \forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \ ; a \neq 0, b \neq 0\ ;\ m, n, c \in \mathbb{N}$$

مثال 5:- لاحظ أن $(7^2)^3 = 7^{(2).(3)} = 7^6 = 7^{(3).(2)} = 7^6$

وهكذا يكون $(7^2)^3 = (7^3)^2$

مثال 6:- أختصر المقدار الآتي بأبسط صورة: $\dfrac{(x^2)^3\ y^4\ z^5}{x^3\ (y^3)^2 z^5}$

الحل :-

$$\frac{(x^2)^3\ y^4\ z^5}{x^3\ (y^3)^2 z^5} = \frac{x^6 .\ y^4 . z^5}{x^3 . y^6 . z^5} = \frac{x^{6-3} .\ z^{5-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 .\ (1)}{y^2} = \frac{x^3}{y^2}$$

مثال 7:- أثبت أن $\dfrac{(81)^{n+1}\ .\ (625)^n}{(9)^{2n} .\ (27) .\ (25)^{2n-1}} = 75$

الحل :-

$$L.H.S = \frac{(81)^{n+1}\ .\ (625)^n}{(9)^{2n} .\ (27) .\ (25)^{2n-1}} = \frac{(3^4)^{n+1}\ .\ (5^4)^n}{(3^2)^{2n} .\ (3^3) .\ (5^2)^{2n-1}}$$

$$= \frac{3^{4n+4}\ .\ 5^{4n}}{3^{4n}\ .\ 3^3 .\ 5^{4n-2}} = (3)^{4n+4-4n-3} . (5)^{4n-4n+2}$$

$$= (3)^1 . (5)^2 = (3) . (25) = 75 = R.H.S$$

4. قانون الأس الصفري:- اي عدد حقيقي (عدا الصفر) مرفوع للاس صفر يساوي 1

اذا كان :- $(a \neq 0) \in \mathbb{R}$

فان :- $a^0 = 1$

مثال 8:-

ما قيمة المقدار $(3)^0 . (3)^5$ ؟

الحل :- $(3)^0 . (3)^5 = 3^0 . 3^5 = 1 . 3^5 = 3^5 = 243$

5. قانون الأس الصحيح السالب

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ولتوضيح معنى الأس الصحيح السالب المعطى بالتعريف اعلاه لاحظ المثال الآتي :-

مثال 9 :-

ما قيمة المقدار $(2)^3$ $(2)^{-3}$ ؟

الحل :-

$$(2)^{-3} \,.\, (2)^3 = 2^{-3} \,.\, 2^3 = \frac{1}{2^3} \,.\, 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = 1$$

مثال 10:- بسط المقدار $\frac{(2)^4.(5)^2.(2)^{-3}}{(3)^{-2}.(5)^{-4}.(2)^2.(5)^3}$ الى أبسط صورة ممكنه :-

الحل:-

$$\frac{(2)^4.(5)^2.(2)^{-3}}{(3)^{-2}.(5)^{-4}.(2)^2.(5)^3} = \frac{(2)^1\ .(5)^2}{(3)^{-2}\,(5)^{-1}\,.\,(2)^2}$$

$$= \frac{(5)^2\,.\,(5)^1\,.\,(3)^2}{(2)^2.\,(2)^{-1}} = \frac{(5)^3\,.\,(3)^2}{2^1} = \frac{1125}{2}$$

تمارين(1-1)

1. أختصر المقادير الآتية بحيث تكون الأسس أعداداً صحيحةً موجبةً .

a) $\frac{(2).(2)^4.(2)^6}{(3)^{2}.(3)^3}$

b) $\frac{(2).(3^2\ .2^2)}{(2)^8.(2)^7}$

c) $\frac{(-2)^5.(-5)^3}{(5)^2.(-2)^4}$

2. ضع كل من المقادير الآتية بأبسط صورة .

a) $\frac{a^2\ .\ b^3}{b^4}\ .\ \frac{a^4\ .b^6}{b^5}\qquad ,\ b \neq 0$

b) $\frac{(a^2.b^3)^4.(b\ .a)^3}{(b^2.a)^{2}}\qquad ,\ a, b \neq 0$

c) $\frac{(x+y)^2\ .\ (x+y)^3}{(x+y)}\qquad ,\ x, y \neq 0$

3. أثبت أن :-

a) $\frac{(5)^{2n}}{(5)^{2n-1}} = 5 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{(3)^2.(3)^{3x}}{3^{2(x+1)}} = 3^x \qquad \forall\ x \in \mathbb{N}$

[1-1-2]قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة:

تعلمنا في البند [1-1-1] أن $\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$ حيث m , n عددان صحيحان موجبان والآن نحاول تعميم القانون هذا عندما يكون أحد الأسس سالباً أو كليهما سالباً (البرهان للاطلاع)، فإذا فرضنا أن أحد الأسين عدد صحيح سالب وليكن n عندئذ نفرض أن $n = -c$ حيث c عدد صحيح موجب وعليه يكون :-

$$a^m \,.\, a^n = a^m . a^{-c} = a^m . \frac{1}{a^c}$$

فإذا كانت $c < m$ يكون :- $a^m \,.\, a^n = \frac{a^m}{a^c} = a^{m-c} = a^{m+(-c)} = a^{m+n}$

وإذا كانت $c > m$ يكون :- $a^m \,.\, a^n = \frac{1}{a^{c-m}} = \frac{1}{a^{-(m-c)}} = a^{m-c} = a^{m+(-c)} = a^{m+n}$

أما إذا كان كل من $n,$ عدداً صحيحاً سالباً فأننا سوف نفرض أن $m = -c \;,\; n = -e$ حيث ان كلاً من c , e عدد صحيح موجب . ويترتب على ذلك أن :-

$$a^m \,.\, a^n = a^{-c} . a^{-e} = \frac{1}{a^c} . \frac{1}{a^e} = \frac{1}{a^{c+e}} = a^{-(c+e)} = a^{-c-e} = a^{(-c)+(-e)} = a^{m+n}$$

وفي حالة كون أحد الأسين صفراً وليكن $(n=0)$ يكون :-

$$a^m \,.\, a^n = a^m . a^0 = a^m . 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$$

وبذلك يكون قانون الأسس في الضرب والذي كان صائباً للأسس الصحيحة الموجبة ، صائباً أيضاً للأسس الصحيحة السالبة والصفر. وبالتسلسل المنطقي ذاته الذي أتبعناه في أعلاه نستطيع إثبات صواب القوانين الأخرى في القسمة أو الرفع .

مثال 11:- أختصر المقدار الآتي $\frac{[(3)^{-5} \,.\, (7)^2]^2}{[(3).(7)]^4}$ بحيث تكون الأسس أعداداً صحيحةً موجبةً .

الحل:-

$$\frac{[(3)^{-5} \,.\, (7)^2]^2}{[(3).(7)]^4} = \frac{(3)^{-10} \,.\, (7)^4}{(3)^4 \,.\, (7)^4} = \frac{1}{(3)^{10} \,.\, (3)^4} = \frac{1}{(3)^{14}}$$

مثال 12:- ضع المقدار الآتي بأبسط صورة

$$(\frac{x^2.y^3}{x^3.y^5})^2 \, . \, (\frac{x^3\,.y^4}{x.y})^5 \quad , \; x,y \neq 0$$

الحل :-

$$(\frac{x^2.y^3}{x^3.y^5})^2 \, . \, (\frac{x^3\,.y^4}{x.y})^5 = \frac{x^4.y^6}{x^6.y^{10}} \, . \frac{x^{15}.y^{20}}{x^5.y^5} = \frac{1}{x^2.y^4} \, . \frac{x^{10}.y^{15}}{1} = x^8.\, y^{11}$$

[1-1-3] تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون أعداداً نسبية

الأس الكسري :- إذا كان $n \in \mathbb{N}^+ \, , n > 1 , m \in \mathbb{Z}$ فأن

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

حيث $a > 0 \, , a \in \mathbb{R}$

وبصورة اخرى $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}}$ مع مراعاة الشروط الوارده اعلاه

مبرهنة :- إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m,n عددان نسبيان فأن $\boxed{(a^m)^n = \; a^{m.n}}$

.

البرهان ((للاطلاع)):-

نفرض أن $m = \frac{c}{d}$, $n = \frac{e}{f}$ حيث c,d,e,f أعداد صحيحه ، $d > 1$, $f > 1$ فيكون :-

$$L.H.S = (a^m)^n = \; (a^{\frac{c}{d}})^{\frac{e}{f}} = [(a^{\frac{1}{d}})^c]^{\frac{e}{f}} = ([(a^{\frac{1}{d}})^c]^e)^{\frac{1}{f}} = [(a^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{f}}]^{ce} = a^{\frac{ce}{df}}$$

$$= a^{\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}} = a^{m.n} = R.H.S$$

مبرهنة :- إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m,n عددان نسبيان فأن $\boxed{a^m.\, a^n = a^{m+n}}$

البرهان ((للاطلاع)):-

نفرض أن $m = \frac{c}{d}$, $n = \frac{e}{f}$ حيث c,d,e,f أعداد صحيحه ، $d > 1$, $f > 1$ فيكون :-

$$a^m = a^{\frac{c}{d}} = a^{\frac{cf}{df}} \quad , \qquad a^n = a^{\frac{e}{f}} = a^{\frac{de}{df}}$$

$$L.H.S = a^m.\, a^n = a^{\frac{cf}{df}} \;\; . \;\; a^{\frac{de}{df}} = (a^{\frac{1}{df}})^{cf}.\, (a^{\frac{1}{df}})^{de} = (a^{\frac{1}{df}})^{cf+de}$$

$$= (a)^{\frac{cf+de}{df}} = (a)^{\frac{cf}{df}+\frac{de}{df}} = (a)^{\frac{c}{d}+\frac{e}{f}} = a^{m+n} = R.H.S$$

نتيجة :- إذا كانت $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية وكانت $a \in \mathbb{R}, m,n \in \mathbb{Q}$ فأن

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

ملاحظة :- يتضح لنا من خلال المبرهنتين الأخيرتين أن قوانين الأسس التي استخدمناها عندما كانت الأسس أعداداً طبيعيةً أو صحيحةً تبقى صائبةً عندما نستخدم ألأعداد النسبية كأسس .

مبرهنة :- ليكن كل من a , b عدداً حقيقياً موجباً $n > 1$, $n \in \mathbb{N}^+$ فأن :-

1) $\boxed{\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}}}$

2) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}}$

ملاحظة:- إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً فأن المبرهنة تكون صائبة عندما يكون a او b سالباً

مثال 13 :- جد ناتج كل مما يأتي :

1. $(\sqrt[4]{7})^5 = (7^{\frac{1}{4}})^5 = 7^{\frac{5}{4}}$

2. $(\sqrt{a^3.b^4}\,)^3 = (a^{\frac{3}{2}}.b^{\frac{4}{2}})^3 = (a^{\frac{3}{2}}.b^2)^3 = a^{\frac{3}{2}.3}.b^{2.3} = a^{\frac{9}{2}}.b^6$

3. $\sqrt{50} = \sqrt{(25).(2)} = \sqrt{25}\,.\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

4. $\sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

5. $\sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-1}{10} = -0.1$

6. $\sqrt[3]{(125)^{-1}}\,.\sqrt[4]{0.0016} = (125)^{\frac{-1}{3}}.\left(\frac{16}{10000}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$= [(5)^3]^{\frac{-1}{3}}.(\frac{2^4}{10^4})^{\frac{1}{4}} = (5)^{-1}.\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{5}.\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

7. $(\sqrt[4]{a^3}\,.\sqrt{b}\,)^{-4}.(\frac{a^4.b^{\frac{8}{3}}}{c^{-4}})^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{3}{4}}.b^{\frac{1}{2}})^{-4}.(a^4.b^{\frac{8}{3}}.c^4)^{\frac{3}{4}}$

$$= a^{-3}.b^{-2}.a^3.b^2.c^3 = c^3$$

8. $(\frac{8}{27})^{\frac{2}{3}} = (\frac{2^3}{3^3})^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{3.\frac{2}{3}}}{3^{3.\frac{2}{3}}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

9. $\sqrt{64\,b^4.c^{-6}} = [(8)^2.b^4.c^{-6}]^{\frac{1}{2}} = (8^2)^{\frac{1}{2}}.(b^4)^{\frac{1}{2}}.(c^{-6})^{\frac{1}{2}} = 8b^2c^{-3} = \frac{8b^2}{c^3}$

مثال 14:- بسط المقدار $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ليكون مقامه عدداً نسبياً .

الحل :-

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

يسمى المقدار $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ في المثال السابق والذي ضربنا به كلاً من بسط الكسر ومقامه بـ(العامل المنسب) والذي يعرف بأنه الحدانية الجبرية التي تحول مقام الكسر الى عدد نسبي.

مثال 15:- بسط المقدار $\frac{3}{2\sqrt{5}+1}$ ليكون مقامه عدداً نسبياً .

الحل :-

$$\frac{3}{2\sqrt{5}+1} = \frac{3}{2\sqrt{5}+1} \cdot \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}-1} = \frac{6\sqrt{5}-3}{(2\sqrt{5})^2-(1)^2} = \frac{6\sqrt{5}-3}{(4).(5)-1} = \frac{6\sqrt{5}-3}{19}$$

مثال 16:- أثبت أن:- $\left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}}.\sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = 8$

الحل:-

$$L.H.S = \left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}}.\sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{n}{2}}}{2.2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \left(\frac{(2)^{2n+\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{n}{2}}}{(2).2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(2^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= (2^{3n})^{\frac{1}{n}} = 2^3 = 8 = R.H.S$$

مثال 17:- أثبت أن :- $\frac{9^{(\frac{1}{2}n+1)}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}} = 18$

الحل:-

$$L.H.S = \frac{9^{(\frac{1}{2}n+1)}+3^{n+1}}{\sqrt{9^n}-3^{n-1}} = \frac{(3^2)^{(\frac{1}{2}n+1)}+3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n}-3^{n-1}} = \frac{(3)^{(n+2)}+3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}}-3^{n-1}}$$

$$= \frac{(3)^{(n+2)}+3^{n+1}}{3^n-3^{n-1}} = \frac{(3^n.3^2)+(3^n.3^1)}{3^n-(3^n.3^{-1})} = \frac{3^n(3^2+3^1)}{3^n(1-3^{-1})} = \frac{9+3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{3-1}{3}}$$

$$= \frac{12}{\frac{2}{3}} = (12).\frac{3}{2} = 18 = R.H.S$$

تمارين(1-2)

1. جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :-

a) $\dfrac{\sqrt[3]{15}\,.\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{12}.\sqrt[3]{2}}$

b) $(\sqrt[7]{27})^{\frac{-7}{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

d) $2A^0 + (2A)^0 - 3$

2. بسط كلاً من المقادير الآتية ليكون الناتج بأسس موجبة :-

a) $\dfrac{5.(3)^{n-1} - 3^n}{3^{n+1} + (2).(3)^{n-1}}$

b) $\dfrac{(25)^n.(10)^{n+1}}{(125)^n.(4)^{\frac{n-2}{2}}}$

c) $\dfrac{x^3}{y^{-2}} \div \dfrac{x^{-2}}{y^3} \qquad , y \neq 0$

d) $x^2.y^2(x^{-2} + y^{-2}) \quad , \ x, y \neq 0$

3. أثبت صحة المتطابقات الآتية:-

a) $\dfrac{2^{n-2}.\ 4^{n+2}}{8^n} = 4 \qquad \forall\ n \in N$

b) $\dfrac{25^{n+2} - 5^{2n+3}}{(4).\ 5^{2n}} = 5^3 \quad \forall\, n \in N$

c) $\dfrac{(5).(5)^{2n} - 4.(25)^{n-\frac{1}{2}}}{(2).(5)^{2n+1} + (125)^{\frac{2n}{3}}} = \dfrac{21}{55}$

d) $\left(\left(\dfrac{4^{n+1}.\ 2^{-n}}{4^{n(n-1)}}\right) \div \left(\dfrac{8^{n+1}}{4^{(n+1)(n-1)}}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

4 . بسط المقادير الآتية ليكون مقامها عدداً نسبياً :-

a) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

[1-1-4] الدالة الأسية - تمثيلها بيانياً – خواصها

أطلعت عزيزي الطالب في البنود السابقة على قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحةً أو نسبيةً . وفي البند هذا سوف نقبل القوانين السابقة للأسس عندما تكون أعداداً حقيقية دون الخوض في تفاصيل برهان ذلك

تعريف :-

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي الواحد فأن الدالة $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} \ \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
تسمى ((الدالة الأسية)) وهي دالة من نوع التقابل ((أي انها دالة شاملة ومتباينة))

ويمكن أعادة صياغة التعريف أعلاه كما يلي :-

تعريف :-

تعرف الدالة الأسية $\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}}\,(\boldsymbol{x})$ بانها تطبيق من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}^{+}$ وقاعدة أقتران التطبيق هذا هي

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}}\,(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{+}/\{\mathbf{1}\} \ , \ \mathrm{x} \in \mathbb{R}$$

ومن أمثلة الدالة الأسية مايأتي :-

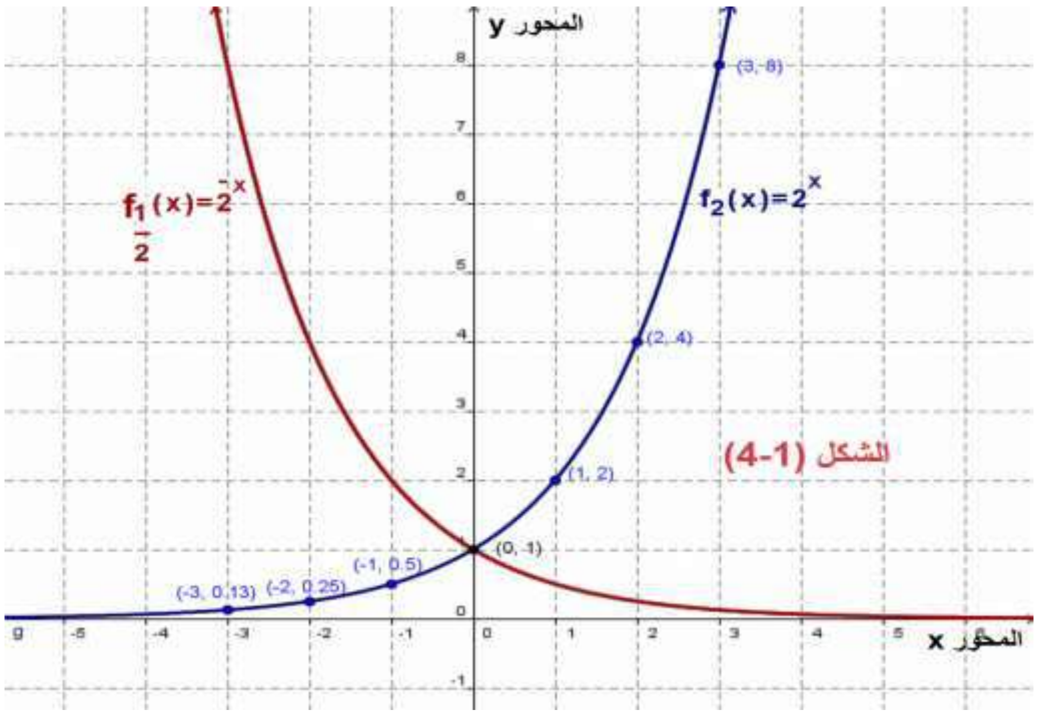
1. $f_7\,(x) = 7^x$
2. $f_5\,(x) = 5^x$
3. $f_{\sqrt{7}}\,(x) = (\sqrt{7})^x$
4. $f_{\frac{3}{4}}\,(x) = (\frac{3}{4})^x$

مثال 18:- ارسم منحني الدالة الأسية $f_2\,(x)$ ومنه ارسم منحني الداله $f_{\frac{1}{2}}\,(x)$.

الحل :- حيث أن $f_2\,(x) = 2^x$ ، نقوم بتكوين جدول قيم تعويضية للدالة بهدف استخراج أزواج مرتبه تمثل بشكل نقاط على المستوي الاحداثي والتوصيل فيما بينها للحصول على جزء من التمثيل البياني للدالة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2\,(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

أما بالنسبة للدالة $f_{\frac{1}{2}}\,(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ فأنه من الملاحظ أن الدالتين $f_2\,(x)$، $f_{\frac{1}{2}}\,(x)$ تناظر أحداهما الاخرى حول المحور y وبذلك نستطيع رسمها بالاعتماد على هذه الحقيقة وكما في الشكل(1-4) في الصفحة اللاحقة :-



وبالمثل يمكن أن نتناول أية دالة حقيقية $f_a\ (x)\ \ = a^x$ حيث ($a \neq 1,\ \ a \in\ \mathbb{R}^+$) وكما أسلفنا فأن الدالة هذه تسمى ((الدالة الأسية)) وهي تتمتع بخواص الأسس التي درسناها في البنود السابقة .أي إنه إذا كان $a > 1\ , m, n \in \mathbb{R}$ فأن :-

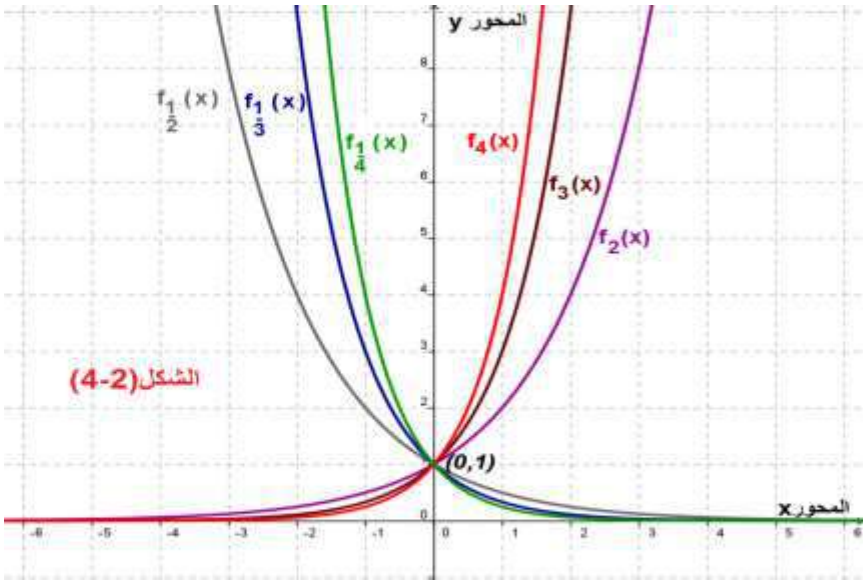
1. $f_a\ (m)\ \ .\ f_a\ (n)\ = f_a\ (m+n)$
2. $\frac{f_a\ (m)}{f_a\ (n)} = f_a\ (m-n)$
3. $[f_a\ (m)]^n\ \ = f_a\ (m.n)$

بعض خواص الدالة الأسية $\boldsymbol{f_a\ (x)\ \ = a^x}$

إذا قمنا برسم منحنيات الدوال $f_2\ (x)\ , f_3\ (x)\ , f_4\ (x)\ , f_5\ (x)\ , ...$
وكذلك الدوال : $f_{\frac{1}{2}}\ (x)\ \ , f_{\frac{1}{3}}\ (x)\ \ , f_{\frac{1}{4}}\ (x)\ ,\ f_{\frac{1}{5}}\ (x)\ , ...$
فأننا سوف نجد مجموعتين من المنحنيات :-

1. دوال تزايدية عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .
2. دوال تناقصية عندما $1 > a > 0$ حيث تتناقص قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .

وفي الشكل (4-2)في الصفحة اللاحقة المخطط البياني لبعض هذه المنحنيات (لاحظ ان الظاهر في الرسم هو جزء من المنحني وليس المنحني كله) ثلاثة منها يكون فيها $a > 1$ والثلاثة الاخرى فيها $1 > a > 0$ وقد أخترنا قيم a في المجموعة الثانية لتكون مقلوبا ت قيم a في المجموعة الاولى كما نلاحظ ان جميع المنحنيات تمر بالنقطه (0,1) .



نرى مما سبق إن :-

1. الدالة $f_{\mathrm{a}}(x) = a^x$ دالة متباينة :

$$\forall\, x\,, y\, \in \mathbb{R}, x \neq y \rightarrow a^x \neq a^y$$

2. الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x) \;= a^x$ دالة شاملة :

مجال f هو $\mathbb{R}$ ومجالها المقابل هو $\mathbb{R}^+$ كما إن المدى هو $\{y \in \mathbb{R}: y > 0\}$ أي إن المدى يساوي المجال المقابل .

3. الدالة $f_{\mathrm{a}}(x) \;= a^x$ دالة متقابلة لأنها دالة شاملة ومتباينه .

[5-1-1] المعادلات الأسية

المعادلة الأسية هي المعادلة التي تحتوي على مجهول في الأس ، وطريقة حلها تعتمد على الحقيقتين الآتيتين :

1. إذا كان $\mathrm{a}^x = a^y$ فأن $x = \mathrm{y}$ حيث $a \neq 1$.
2. إذا كان $a^x = b^y$ فأن $x = y = 0$ حيث $a \neq b \neq 1$

مثال 19:- حل المعادلات الأسية الآتية :-

1) $125^x = 5^{x-2}$
2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

الحل:-

1) $125^x = 5^{x-2}$

$$[(5)^3]^x = 5^{x-2} \quad \Rightarrow 5^{3x} = 5^{x-2} \quad \Rightarrow 3x = x - 2 \quad \Rightarrow 3x - x = -2$$

$$2x = \; -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\therefore S.s = \{-1\}$$

2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

$$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore S.s = \{-2\}$$

مثال 20:- حل المعادلات الأسية الآتية :-

1) $16^x = \frac{1}{4}$ 2) $5^{x^2-x} = 25$ 3) $4^{2x-3} = 1$

4) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

الحل:-

1) $16^x = \frac{1}{4}$

$$[(4)^2]^x = (4)^{-1}$$
$$(4)^{2x} = (4)^{-1}$$
$$2x = -1$$
$$x = \frac{-1}{2}$$
$$\Rightarrow S.s = \{\frac{-1}{2}\}$$

2) $5^{x^2-x} = 25$

$$5^{x^2-x} = 5^2$$
$$x^2 - x = 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

أما $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

أو $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$$\Rightarrow S.s = \{-1, 2\}$$

3) $4^{2x-3} = 1$

$$4^{2x-3} = 4^0$$
$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow S.s = \{\frac{3}{2}\}$$

4) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$
$$\Rightarrow S.s = \{-2, +2\}$$

تمارين(3-1)

1. جد مجموعة الحل في كل من المعادلات الآتية :-

a) $(0.01)^{-x} = 100$

b) $(0.1)^{x+1} = 10$

c) $x^{5x} = \sqrt{x}, \quad x \neq 0$

d) $1 = y^{x^2-3x-4}$

e) $7^{x^2-2x+1} = 49^{x-1}$

f) $2^{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{16}$

g) $x^{\frac{3}{4}} = 27$

h) $10^{x} = \frac{10}{\sqrt{1000}}$

2. مثل الدالة الأسية $f_3\,(x) = 3^x$ بيانياً ومن المخطط البياني جد قيمة $3^{1.5}$ بصورة تقريبية ، وإذا علمت أن $3^x = 5$ جد قيمة x بصورة **تقريبية .**

[1-2] الدالة اللوغاريتمية والقوانين الأساسية لها

لقد عرفنا في موضوع الأسس أن $2^4 = 16 \quad 2^3 = 8, \quad 2^2 = 4,$ وهكذا وبذلك يكون العدد الذي يوضع أساً للأساس 2 ليكون الناتج 4 هو العدد 2 وليكون الناتج 8 هو العدد 3 وليكون الناتج 16 هو العدد 4 كما اننا أوضحنا ان العدد 2 في الامثلة أعلاه يسمى ((الأساس)) بينما كل من الأعداد 2،3،4 تسمى ((الأس)) أما الأعداد 4 ، 8 ، 16 فانها تسمى ((الناتج)) .

فإذا اردنا ان نسأل ((ما هو العدد الذي نجعله أساً للعدد 5 ليكون الناتج 125 فان التسلسل المنطقي الذي سوف نتبعه في الحل هو كالآتي :-

$$5^x = 125 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^3 \Rightarrow \quad x = 3$$

إن العدد (3) والذي يجعل أساً للأساس 5 لكي ينتج العدد 125 يطلق عليه أسم ((لوغاريتم)) العدد 125 للأساس 5 ويرمز له بالرمز $\log_5 125$ ،وهو يعبّر رمزياً عن العبارة ((لوغاريتم العدد 125 للأساس 5 يساوي 3)):-

نلاحظ من ذلك ان الصيغة اللوغاريتمية هي صيغة عكسية للصيغة الأسية والعكس صحيح .

[1-2-1] الدالة اللوغاريتمية التي اساسها عدد حقيقي

قبل أن ندخل في تفاصيل الدالة اللوغاريتمية سنطلع أولاً على سلوك الدالة العكسية عن طريق ملاحظة المثال الآتي:-

لتكن $f: \{1,2,3,4,5\} \to \{-1,1,3,5,7\}$ بحيث $f(x) = 2x - 3$ نلاحظ إن :-

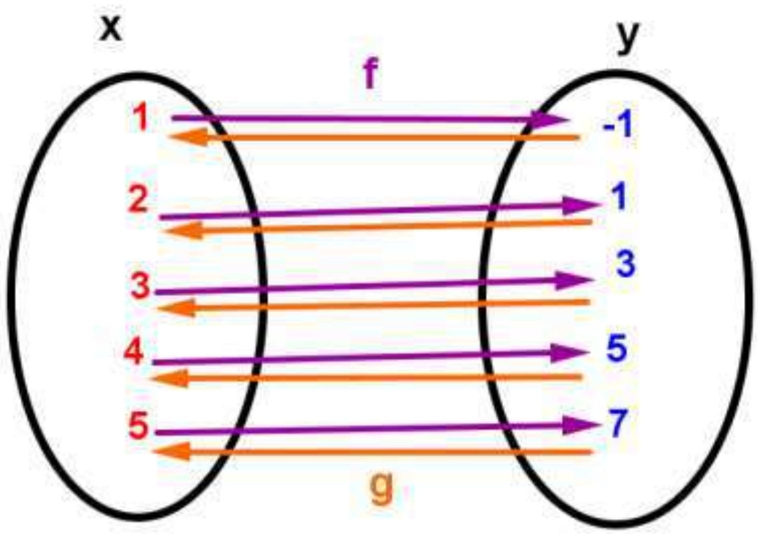
$$f(1) = -1 \to (1,-1)$$
$$f(2) = 1 \to (2,1)$$
$$f(3) = 3 \to (3,3)$$
$$f(4) = 5 \to (4,5)$$
$$f(5) = 7 \to (5,7)$$

أي إن كل عنصر من عناصر مجال الدالة f يقترن بعنصر وحيد فقط من عناصر المجال المقابل للدالة كما إن بيان الداله هو : $\{(1,-1),(2,1),(3,3),(4,5),(5,7)\}$

والآن لتكن $g: \{-1,1,3,5,7\} \to \{\ 1,2,3,4,5\}$ بحيث $g(y) = \frac{y+3}{2}$ نلاحظ إن :-

$$g(-1) = 1 \to (-1,1)$$
$$g(1) = 2 \to (1,2)$$
$$g(3) = 3 \to (3,3)$$
$$g(5) = 4 \to (5,4)$$
$$g(7) = 5 \to (7,5)$$

اي ان $g(y)$ دالة لانها تقرن كل عنصر من عناصر مجالها بعنصر وحيد من عناصر مجالها المقابل والمخطط السهمي في الصفحة اللاحقة يمثل الدالتين $f\ ,g$



لاحظ إن ألدالة g تمحو أثر ألدالة f وتعيد الصورة الى وضعها الأصلي وتوصف الدالة g بأنها دالة عكسية للدالة f ، كما يرمز للدالة g بالرمز f^{-1} . ((إن f^{-1}مجرد رمز ولا تعني $\frac{1}{f}$))

لقد تعلمنا في البند الخاص بالدالة الأسية إن $y = a^x$ حيث $a \in \mathbb{R}^+/\{1\}$ ولو تمعنا في الأمثلة التي أوردناها في شرحنا لمفهوم اللوغاريتم لتوصلنا الى ان الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية ولذلك يمكننا صياغة التعريف الآتي للدالة اللوغاريتمية:-

ألدالة العكسية للدالة الأسية التي صيغتها العامة $y = a^x$ تسمى الدالة اللوغاريتمية وصيغتها العامة هي $x = \mathrm{Log}_a\, y$ وتقرأ ((x يساوي لوغاريتم y للأساس a)). أي إن :-

$$\boldsymbol{y = a^x \Leftrightarrow x = \underset{a}{\mathrm{Log}}\, y}$$

الصيغة الأسية الصيغة اللوغاريتمية

وبذلك يمكننا الانتقال من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس وكما موضح بالأمثلة الآتية :-

مثال 21:- أكتب ألصيغة اللوغاريتمية المقابلة لكل من الصيغ الأسية الآتية:-

1) $16 = 4^2$ 2) $13 = 13^1$

3) $1000000 = 10^6$ 4) $0.00001 = 10^{-5}$

ألحل:-

1) $16 = 4^2 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

2) $13 = 13^1 \Rightarrow \log_{13} 13 = 1$

3) $1000000 = 10^6 \Rightarrow \log_{10} 1000000 = 6$

4) $0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow \log_{10} 0.00001 = -5$

مثال 22:- **أكتب الصيغة الأسية المقابلة لكل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية:-**

1) $3 = \log_3 27$
2) $-3 = \log_5 \frac{1}{125}$
3) $1 = \log_{10} 10$

الحل:-

1) $3 = \log_3 27 \Rightarrow 27 = 3^3$
2) $-3 = \log_5 \frac{1}{125} \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^{-3}$
3) $1 = \log_{10} 10 \Rightarrow 10 = 10^1$

ملاحظات :-

1. **لوغاريتم العدد للأساس نفسه يساوي 1 أي $\log_x x = 1$**
2. **لوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس عدا الواحد يساوي صفراً أي ($\log_a 1 = 0 \quad , a \neq 1$)**
3. **أن مجال الدالة اللوغاريتمية هو $\mathbb{R}^+$ ويترتب على ذلك أن العدد (صفر) و ان أي عدد سالب ليس له لوغاريتم .**

مثال 23:- **جد قيمة المجهول في كل مما يأتي :-**

a) $\log_4 x = 3$
b) $\log_x 64 = 6$
c) $\log_{125} 25 = \mathrm{x}$

الحل:-

a) $x = 4^3 = 64$
b) $64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6 \Rightarrow x = 2$
c) $25 = 125^x \Rightarrow 5^2 = 5^{3x} \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

مثال 24:- **جد ناتج ما يلي :-**

a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
b) $\log_{3\sqrt{3}} 81$
c) $\log_{10} 0.001$

الحل:-

a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = 2^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

b) $\log_{\sqrt[3]{3}} 81 = y \Rightarrow 81 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^y \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3}y}$

$\Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{y}{3}} \Rightarrow 4 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 12$

c) $\log_{10} 0.001 = z \Rightarrow 0.001 = 10^z \Rightarrow \frac{1}{1000} = 10^z \Rightarrow 10^{-3} = 10^z \Rightarrow z = -3$

مثال 25:- **ما الأس الذي يرفع أليه العدد 5 ليكون الناتج $\frac{1}{625}$ ؟**

الحل:-

$$\log_5 \frac{1}{625} = x$$
$$\frac{1}{625} = 5^x$$
$$\frac{1}{5^4} = 5^x$$
$$5^{-4} = 5^x$$
$$x = -4$$

مثال 26:- **ما العدد ألذي لوغاريتمه للأساس (0.01) يساوي 2 ؟**

الحل:- نفرض إن العدد= y

$$\log_{0.01} y = 2$$
$$y = 0.01^2$$
$$y = 0.0001$$

مثال 27:- **جد لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$**

الحل :- نفرض ان قيمة لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$ يساوي x

$$\log_{2\sqrt{2}} 16 = x$$
$$(2\sqrt{2})^x = 16$$
$$(2.\,2^{\frac{1}{2}})^x = 2^4$$
$$2^{\frac{3}{2}x} = 2^4$$
$$\frac{3}{2}x = 4$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

تمارين(4-1)

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة اللوغاريتمية :-

a) $125 = 5^3$
b) $4 = (\sqrt{2})^4$
c) $0.000001 = 10^{-6}$
d) $a^0 = 1$
e) $2 = 8^{\frac{1}{3}}$

2. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة الأسية :-

a) $\log_{\sqrt{5}} 3125 = 10$
b) $\log_a a = 1$
c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
e) $\log_{10} 0.001 = -3$

3. أحسب قيم اللوغاريتمات الآتية :-

a) $\log_{10} 0.01$
b) $\log_7 1$
c) $\log_{10} 0.000001$
d) $\log_3 3$

4. ما قيمة x في كل مما يلي :-

a) $\log_x 0.001 = 1$
b) $\log_{10}(2x+3) = 1$
c) $\log_x \frac{1}{100} = -2$
d) $\log_2 64 = 10 - 2x$
e) $\log_{0.001} x = 2$
f) $\log_2 32 + \log_{25} 625 - \log_3 81 = x$

[1-2-2] أهم خواص اللوغاريتمات

مبرهنة (1) :- لوغاريتم حاصل ضرب عددين حقيقيين موجبين أو أكثر لأساس معلوم يساوي مجموع لوغاريتمي أو مجموع لوغاريتمات الأعداد هذه بالنسبة للأساس نفسه وبالعكس

أي أن:- $\boxed{\mathbf{\log_a(.y.z\ldots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \cdots}}$

البرهان ((للاطلاع)):- **سنبرهن لحاصل ضرب عددين فقط**

ليكن كل من $x\,,y$ عدداً حقيقياً موجباً ولتكن $a \neq 1$ فأن المطلوب هو ان نبرهن :

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

نفرض أن :-

$$\log_a x = n \quad \Leftrightarrow x = a^n$$

وأن :-

$$\log_a y = \mathrm{m} \Leftrightarrow \ \mathrm{y} = a^m$$

وبأستخدام قانون الضرب في الأسس نحصل على :-

$$x.y = a^n.a^m = a^{n+m}$$
$$\Rightarrow \log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$$

وبالطريقة ذاتها نستطيع البرهنة لحاصل ضرب أكثر من عددين .

مثال 28:-

a) $\log_2[(5).(7)] = \log_2 5 + \log_2 7$
b) $\log_{\sqrt{2}}[(3).(11)] = \log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} 11$
c) $\log_7 30 = \log_7[(2).(3).(5\,)] = \log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 5$

مثال 29:- أثبت أن :-

a) $\log_{10}\frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10}\frac{1}{8} = 0$
b) $\log_a\frac{ax}{y} + \log_a\frac{y}{z} + \log_a\frac{z}{x} = 1$

الحل:-

a) $L.H.S = \log_{10}\frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10}\frac{1}{8} = \log_{10}\left(\frac{8}{3}.(3).\frac{1}{8}\right)$
$= \log_{10} 1 = 0 = R.H.S$

b) $L.H.S = \log_a\frac{ax}{y} + \log_a\frac{y}{z} + \log_a\frac{z}{x} = \log_a\left(\frac{ax}{y}.\frac{y}{z}.\frac{z}{x}\right)$
$= \log_a a = 1 = R.H.S$

مبرهنة (2) :- لوغاريتم حاصل قسمة عددين حقيقيين موجبين لأساس معلوم يساوي لوغاريتم البسط مطروحاً منه لوغاريتم المقام بالنسبة للآساس نفسه وبالعكس أي إن :-

$$\boxed{\mathbf{\log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}}$$

البرهان ((للاطلاع)):-

ليكن كل من $x\,,y$ عدداً حقيقياً موجباً ولتكن $a \neq 1, y \neq 0$

نفرض أن :-

$$\log_a x = n \quad \Leftrightarrow x = a^n$$

وأن :-

$$\log_a y = \mathrm{m} \Leftrightarrow \ \mathrm{y} = a^m$$

وبأستخدام قانون القسمة في الأسس نحصل على :-

$$\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{x}{y}\right) \ = a^{n-m} \ = \log_a x - \log_a y$$

مثال 30:- **نوضح في المثال كيفية تطبيق مبرهنة (2)**

a) $\log_3 \frac{x}{5} = \log_3 x - \log_3 5$

b) $\log_5 \frac{6}{11} = \log_5 6 - \log_5 11 = \log_5[(2).(3)] - \log_5 11$

$\qquad = \log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 11$

مثال 31:- **أثبت أن :-**

a) $\log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16} = \log_{10} 3$

b) $\log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 = 0$

الحل:-

a) $L.H.S = \log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16}$

$\qquad = \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \div \frac{15}{16}\right)$

$\qquad = \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{15}\right) = \log_{10} 3 = R.H.S$

b) $L.H.S = \log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12$

$\qquad = \log_a \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{66} \cdot 12}{\frac{132}{121}} \ = \log_a \left(\frac{12}{11} \cdot \frac{121}{132}\right) = \log_a 1 = 0 = R.H.S$

مثال 32:- أختصر المقدار الاتي:-

$$\log_2(\tfrac{16}{15})^2 + \log_2(\tfrac{5}{2})^3 - \log_2 \tfrac{80}{9}$$

الحل:-

$$\log_2(\frac{16}{15})^2 + \log_2(\frac{5}{2})^3 - \log_2 \frac{80}{9} = \log_2\left[\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \div \frac{80}{9}\right]$$

$$= \log_2\left[\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{80}\right] = \log_2 2 = 1$$

نتيجة:- $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$ أي إن :-

$$\boldsymbol{\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x}$$

مثال 33: إذا كان $\log_{10} 5 = +0.699$ فأن

$$\log_{10} \frac{1}{5} = -\log_{10} 5 = -0.699$$

مبرهنة (3) :- لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب مرفوع لأس معين لأساس معلوم يساوي حاصل ضرب ذلك الأس في لوغاريتم العدد وللأساس نفسه .

$$\boldsymbol{\log_a x^n = n.\log_a x}$$

البرهان:- ((للاطلاع)) ليكن x أي عدد حقيقي موجب ، n عدد حقيقي ، $a > 0\ , a \neq 1$ فأن :-

$x^n = x.x.x.x.x \ldots$ (الى nمن المرات)

$\log_a x^n = \log_a(x.x.x.x.x \ldots$ (الىnمن المرات)

وباستخدام قانون الضرب في اللوغاريتمات نحصل على :-

$\log_a x^n = \log_a x + \log_a x + \log_a x \ldots$ (الى nمن المرات)

$$\therefore \quad \log_a x^n = \mathrm{n}.\log_a x$$

نتيجة:- لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب لأساس معلوم يساوي لوغاريتم العدد لأي أساس آخر مقسوماً على لوغاريتم الأساس الاصلي للأساس الجديد.

أي أن:- $\boldsymbol{\log_a \quad = \frac{\log_b x}{\log_b a},\ b \neq 1}$

البرهان :- ((للاطلاع)) نفرض إن :- $\log_a x = n \Leftrightarrow \mathrm{x} = a^n$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس b نحصل على :-

$$\log_b x = \log_b a^n$$

$$\log_b x = n.\log_b a$$

$$n = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

وبتعويض قيمة n نحصل على :-

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

مثال 34:- لاحظ اسلوب التبسيط المستخدم في كل مما يأتي :

a) $\log_5 \sqrt{7} = \log_5 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_5 7$

b) $\log_7 5 = \frac{\log_b 5}{\log_b 7}$ $(\, b \neq 1)$

c) $\log_4 5^{-3} = -3 \log_4 5$

مثال 35:- أختصر المقدار الآتي : $\mathbf{\log_5 7 \,.\, \log_7 11 \,.\, \log_{11} 3 \,.\, \log_3 5}$

ألحل:-

$$\log_5 7 \,.\, \log_7 11 \,.\, \log_{11} 3 \,.\, \log_3 5 = \frac{\log_b 7}{\log_b 5} \cdot \frac{\log_b 11}{\log_b 7} \cdot \frac{\log_b 3}{\log_b 11} \cdot \frac{\log_b 5}{\log_b 3} = 1$$

مثال 36:- برهن إن : $\mathbf{\log_b a \,.\, \log_c b \,.\, \log_d c = \log_d a}$

الحل :-

$$L.H.S = \log_b a \,.\, \log_c b \,.\, \log_d c = \frac{\log_v a}{\log_v b} \cdot \frac{\log_v b}{\log_v c} \cdot \frac{\log_v c}{\log_v d} \;, v \neq 1$$

$$= \frac{\log_v a}{\log_v d} = \log_d a = R.H.S$$

ملاحظة:- **إذا تساوى لوغاريتم عددين للأساس نفسه فأن العددين متساويان ، أي:-**

$$\mathbf{\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y}$$

مثال 37:- حل المعادلة الآتية: $\mathbf{\log_5(\, 2x + 1) + \log_5(x - 2) = \log_5 7}$

الحل:- في المثال هذا لم تعط مجموعة التعويض ولذلك يقتضي الامر أيجادها أولاً وكما يلي :-

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow \{x : x > \frac{-1}{2}\}$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow \{x : x > 2\}$$

ولذلك فأن مجموعة التعويض للمعادلة اللوغاريتمية ستكون :-

$$\{x : x > \frac{-1}{2}\} \cap \{x : x > 2\} = \{x : x > 2\}$$

والان نعاود حل المعادلة :-

$$\log_5(\, 2x + 1) + \log_5(x - 2) = \log_5 7$$

$$\log_5(2x + 1).(x - 2) = \log_5 7$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 3) = 0$$

أما :-

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \notin \{x : x > 2\} \text{يهمل}$$

أو :-

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \in \{\mathrm{x}: x>2\}$$
$$\therefore S.s=\{3\}$$

مثال 38:- حل المعادلة الآتية:-

$$\log_{10}(3x-7)+\log_{10}(3x+1)=1+\log_{10} 2$$

الحل :- قبل أن نبدأ بحل ألمعادلة لا بدّ لنا أن نلاحظ الشرطين الآتيين :-

$$3x-7>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$$
$$3x+1>0 \Rightarrow x>\frac{-1}{3}$$

أي أن مجموعة التعويض للمعادلة هي:-

$$\{x: x>\frac{7}{3}\} \cap \{\mathrm{x}: x>\frac{-1}{3}\} = \{x>\frac{7}{3}\}$$
$$\log_{10}(3x-7)+\log_{10}(3x+1)=\log_{10} 10+\log_{10} 2$$
$$\log_{10}[(3x-7)(3x+1)]=\log_{10}(10).(2)$$
$$\log_{10}(9x^2-18x-7)=\log_{10} 20$$
$$9x^2-18x-7=20$$
$$9x^2-18x-27=0$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$

أما :-

$$x-3=0 \Rightarrow x=3 \in \{x>\tfrac{7}{3}\}$$

أو :-

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \notin \left\{x>\tfrac{7}{3}\right\}$$ يهمل

$$\therefore \mathrm{S.s}=\{3\}$$

تمارين(1-5)

1. اختصر كلاً من المقادير الآتية:-

a) $\log_{10}\frac{5}{16}-\log_{10}\frac{8}{27}+\log_{10}\frac{32}{9}$

b) $\log_5 15+\log_5 75-\log_5 9$

c) $\log_{10}(x-9)-\log_{10}(x-3)+\log_{10}\frac{x-3}{x+3}$

d) $\frac{\log_{10}\sqrt{25}+\log_{10}\sqrt{27}-\log_{10}\sqrt{8}}{\log_{10}15-\log_{10}2}$

2. جد قيمة المجهول في كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية:-

a) $\log_{10}\frac{55}{6}-\log_{10}x=\log_{10}\frac{11}{2}+1$

b) $\log_{10}x+\log_{10}x^2+\log_{10}x^3=12$

c) $\log_3 81=7-3y$

d) $\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\mathbf{2}$

3. أثبت صحة المتطابقات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10}\frac{9}{8}-\log_{10}\frac{18}{40}+\log_{10}\frac{72}{18}=1$

b) $\log_{10}0.1+\log_{10}18-\log_{10}6-\log_{10}3=-1$

c) $\log_{10}3+\log_{10}270-2\log_{10}9=1$

d) $\log_b 30-\log_b 310-\log_b 31+\log_b 961-\log_b 3=0\ ,b\neq 1$

4. حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10}(3x+1)+\log_{10}(3x-7)-\log_{10}2=1$

b) $\log_a(10-y)+\log_a(y+2)=\log_a 11$ ، $y\in\{10>y>2\}$

c) $\log_2(x+14)-\log_2(x-5)=1$

d) $\log_5(n+1)+\log_5(2n-1)=1$

5. إذا علمت ان $\mathbf{og_{10}\,2=0.3010}$ ، $\mathbf{\log_{10}3=0.4771}$ فاحسب قيمة كل مما يلي :-

a) $\log_{10}0.3$

b) $\log_{10}60$

c) $\log_{10}\frac{64}{27}$

d) $\log_{10}\frac{81}{\sqrt{8}}$

[1-2-3] اللوغاريتمات العشرية (لوغاريتمات الأعداد للأساس 10)

اللوغاريتمات العشرية هي اللوغاريتمات التي يكون أساسها العدد 10 ولأنها تستخدم كثيراً في الحسابات العلمية لذا أتفق علماء الرياضيات على عدم كتابة الأساس 10 عند أستعمالها ، فمثلاً $\log 7$ يقصد بها $\log_{10} 7$.

لاحظ الصيغتين الأسية واللوغاريتمية الآتية والتي تبين لنا لوغاريتمات القوى الصحيحه للعدد10

$$10000 = 10^4 \Leftrightarrow \log 10000 = 4$$
$$1000 = 10^3 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$
$$100 = 10^2 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$
$$10 = 10^1 \Leftrightarrow \log 10 = 1$$
$$1 = 10^0 \Leftrightarrow \log 1 = 0$$
$$0.1 = 10^{-1} \Leftrightarrow \log 0.1 = -1$$
$$0.01 = 10^{-2} \Leftrightarrow \log 0.01 = -2$$
$$0.001 = 10^{-3} \Leftrightarrow \log 0.001 = -3$$

وهكذا......

مما سبق نستنتج ما يلي :-

1. لوغاريتمات القوى الصحيحة للعدد10 هي أعداد صحيحة (موجبة) إذا كانت القوى أكبر من الواحد و(سالبة) إذا كانت القوى أصغر من الواحد .
2. الدالة $y = \log x$ (وهي تقابل من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}^+$) وهي دالة متزايدة ونقصد بذلك أن قيمة الدالة $\log x$ تتزايد مع أزدياد قيمة x ويترتب على ذلك ان لوغاريتم العدد يزداد بأزدياد العدد ويصغر بصغره .
3. اذا كانت $x \in \{x : x \leq 0\}$ فأن $\log x$ تكون غير معرفة . (أي ان العدد السالب والصفر ليس لهما لوغاريتم) .
4. اذا كانت $x \in (0,1)$ فأن $\log x \in \{y : y < 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون سالبه) .
5. عندما $x = 0$ فأن $\log x = -\infty$
6. اذا كانت $x \in \{x : x > 1\}$ فأن $\log x \in \{y : y > 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون موجبة).

[1-2-4] اللوغاريتمات الطبيعية

تعرفنا في البند السابق على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الأساس 10. والآن سنتعرف على اللوغاريتمات التي أساسها العدد الذي يرمز له بالرمز (e) والذي قيمته (2.71828) والذي يسمى العدد النيبيري.

معلومات إثرائية :-

سمي العدد e بالعدد النيبيري نسبة الى نابير ، وهو لورد اسكتلندي ، لم يكن مكتشفه ، بل ان مكتشفه بستاني كان يعمل عند اللورد نابير ، فقد كان ولع نابير بالهندسة يدفعه ليطلب طلبات غريبة من البستاني ، فتارة يقول له أزرع لي حديقة على شكل مستطيل ، وتارة اخرى على شكل مثلث ، ويعطيه بذوراً قليلة لا تناسب المساحة المطلوب زراعتها ، حتى أنه بالغ في طلباته لدرجة ابتكار أشكال هندسية غير معروفة في ذلك الوقت ، مما دفع البستاني للإطلاع والقراءة الهندسية ، وخلال المعاناة هذه استطاع البستاني وبتوجيهات نابير الغريبة زراعة حديقة تأخذ شكلاً أقرب إلى المثلث ولكن أحد الأضلاع على شكل قطع أو مساحة تحت منحنى دالة أسية ، وعند محاولة إيجاد المساحة تمكن من الوصول إلى هذا العدد e ، ولقد اعطى الرمز e للعدد النيبيري نسبة إلى الكلمة ((Ecosse)) والتي تعني (اسكتلندا) ' وهنالك من يعتقد أن أختيار الحرف e لهذا الثابت لكونه اول حرف من كلمة الأس ((exponential)) وهنالك من يشير الى أحتمال أن يكون الرياضي أويلر((Euler)) قد اختار هذا الحرف لأنه الحرف الأول من أسمه .
هناك علاقات رئيسة تستخدم لتعريف e وهذه التعاريف متكافئة فيما بينها، أي إن كلاً منها يصلح لتعريف e ومنها

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e \quad ، \quad \int_{1}^{e}\frac{dx}{x}=1$$

كانت هناك إشارات الى العدد e في أوراق جون نايبير حول اللوغاريتمات ، وأول من أشار إلى هذا الثابت هو جاكوب برنوللي .. وقد استخدمه لاحقاً ليبنز ، واستخدمه بعد ذلك أويلر .كما أن العالم جاكوب برنوللي توصل إلى العدد هذا عند قيامه بحساب الفائدة المركبة (*Compound Interest*). فلقد قام برنوللي بحساب الفائدة مفترضاً إن الفائدة المصرفية 100% سنوياً والمبلغ الأصلي دولاراً واحداً و إن الفائدة تضاف شهرياً وتوصل الى انه سيحصل على 2.613 دولار تقريباً في نهاية السنة ، وإذا كانت الفائدة تضاف يومياً فإنه سيحصل على 2.715 دولار تقريباً في نهاية السنة .
وقد عمم برنوللي ما سبق بأنه لو كانت الفائدة بمقدار r في السنة ، وانها تضاف إلى الحساب n مرة في السنة ، فإن المبلغ في نهاية السنة سيكون : $x_n = x(1+\frac{r}{n})^n$ وإن هذه المتتاليــة تتقارب إلى عدد بعينه ... وإذا كانت الفائدة تضاف بشكل مستمر (في كل لحظة) فإننا سنحصل على المقدار $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ... والذي عندما نبسطه سوف نحصل على :-

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=2.718281828459045$$

(لخمسة عشر مرتبة بعد الفارزة) والذي نرمز له بالرمز e .

$$\therefore e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cong 2.718281828459045$$

ملاحظة:- تسمى اللوغاريتمات بدلالة الأساس (e) باللوغاريتمات الطبيعية ولها خواص اللوغاريتمات العشرية ذاتها ، وهي تظهر في عدة مجالات وتطبيقات علمية متعدده قد تتعرف عليها في دراستك المستقبلية ،

يعرف اللوغاريتم الطبيعي للعدد y بالصيغه $\ln y$ لتمييزه عن اللوغاريتم الاعتيادي (ألعشري) $(\log y)$ أما الرمز المختصر (ln) فهو مأخوذ من كلمة (natural) والتي تعني (طبيعي) .

ومن تعريف الدالة اللوغاريتمية لو أستبدلنا الأساس a بالأساس e فأننا سوف نحصل على :-

$$\boxed{\boldsymbol{x = \ln y \Leftrightarrow y = e^{x}}}$$

نتيجة (1) :-

$$\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln e^{x} = x}$$

البرهان :-

$$\boldsymbol{L.H.S = ln\, e^{x} = x \ln e = x.1 = x = R.H.S}$$

نتيجه (2) :-

$$\boldsymbol{\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad a > 0}$$

البرهان :- ليكن $\boldsymbol{y = \log_a x \Rightarrow x = a^{y}}$

بأخذ اللوغار يتم الطبيعي للطرفين نحصل على :-

$$\ln x = \ln a^{y} \;\Rightarrow \ln x = y.\ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\therefore log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$$

مثال 39:- **جد قيمة** $\boldsymbol{\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15}}$

الحل:-

$$\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}} + \frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}} = \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15} = \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 15} = \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

تمارين(1-6)

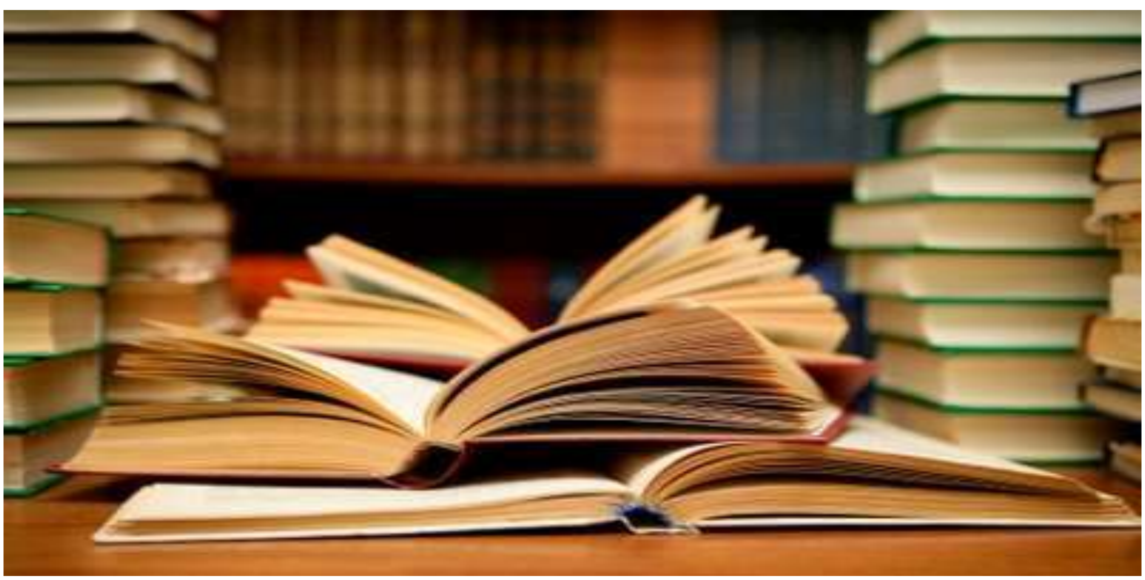
1. أثبت أن :-

a) $\frac{1}{\log_a abc}+\frac{1}{\log_b abc}+\frac{1}{\log_c abc}=1$

b) $\log_{10}(\frac{40}{9})+2(2\log_{10}5+\log_{10}6)=5$

2.أذا كان : $b=\log_a c$, $a=\log_c b$ أثبت أن $\log_b a=\frac{1}{ab}$


الفصل الثاني
الغاية والأستمرارية



الفصل الثاني

الغاية والاستمرارية

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1- يتعرف على مفهوم الغاية .

2- يتقن المبرهنات الاساسية للغايات .

3- يتعرف على مفاهيم جبر الغايات ويتمكن من تطبيقها .

4- يتعرف على مفهوم الدالة المستمرة .

5- يتمكن من تحديد استمرارية الدالة عند نقطة ما.

الفصل الثاني
الغاية والاستمرارية

[2-1] غاية الدالة (*Limit of a function*)

إن مفهوم الغاية من المفاهيم الأساسية في الرياضيات ومع إنه من المفاهيم البسيطة إلا أنه يحتاج للدقة وسوف نتناوله بأسلوب مبسط دون الدخول في التفاصيل الدقيقة لتعريفه حيث سنتناول مفهوم غاية الدالة في نقطة ممهدين لذلك بأمثلة متنوعة وسوف نؤكد على طرق استخراج غايات بعض الدوال دون الخوض في تفاصيل البراهين لأن ذلك لا يتناسب مع هذه المرحلة الدراسية ، ولأجل تبسيط الأمور على الطالب فإننا سوف لا نشير الى مجال الدوال التي نتعامل معها معتبرين إنه أوسع مجال للدالة قيد الدرس .

لو أخذنا الدالة $y = f(x) = 2x + 3$ وأفترضنا ان قيمة x تقترب من 2 فأننا سنتوقع إن $2x + 3$ سوف تقترب من العدد 7 . نعبر عن المفهوم هذا بالقول إن غاية المقدار $2x + 3$ تساوي 7 عندما تقترب x من العدد 2 وبالرموز نكتب: $\lim_{x \to 2}(2x + 3) = 7$

ويمكننا القول إن غاية الدالة تساوي قيمة تلك الدالة في النقطة أو القيمة التي تقترب منها x عندما تكون الدالة معرفة في تلك النقطه فمثلاً لو أخذنا الدالة $f(x) = x^2 - 3$ وأفترضنا إن قيمة x تقترب من العدد 3 فأننا نتوقع إن $x^2 - 3$ سوف تقترب من العدد 6 ونكتب بالرموز $\lim_{x \to 3}(x^2 - 3) = 6$

والان لنتابع معاً تفاصيل الجدول الآتي والذي يصف لنا سلوك الدالة $y = f(x) = 2x + 3$ عندما تقترب قيمة x من العدد(1) من اليسار ويرمز لذلك بالرمز$(x \to 1^-)$ ومن اليمين ويرمز لذلك بالرمز $(x \to 1^+)$

$x \to 1^-$ (من اليسار) **1** **(من اليمين) $x \to 1^+$**

x	…..	0.9	0.99	0.999		….	1.001	1.01	1.1	….
$f(x)$	…..	4.8	4.98	4.998		….	5.002	5.02	5.2	….

نلاحظ إنه كلما إقتربت x من العدد 1 من اليمين أو من اليسار فإن $f(x) = 2x + 3$ تقترب من العدد 5

مثال 1:- لتكن $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ، نعلم إن مجال هذه الدالة هو $\mathbb{R}/\{0\}$

$x \to 0^-$ من اليسار **0** من اليمين $x \to 0^+$

x	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{4}$		….	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-1	-2	-3	-4		….	4	3	2	1

نلاحظ من الجدول السابق انه كلما إقتربت x من الصفر من جهة اليسار (أصغر من صفر) فإن $f(x)$ تزداد قيمتها العددية ولا تقترب من عدد معين وكذلك كلما أقتربت x من الصفر من جهة اليمين (أكبر من صفر) فإن $f(x)$ تزداد قيمتها ولا تقترب من عدد معين . ويعبر عن ذلك بالقول إنه لا توجد غاية للدالة عندما تقترب x من الصفرأو إن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير معرفة.

ملاحظات :-

1. غاية الدالة هي عملية أقتراب وليس مساواة ، أي ان الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة معيّنة ولتكن L عندما تقترب x من قيمة معّينة ولتكن a وبالرموز نكتب

$$f(x) \to L \quad \text{عندما} \quad x \to a$$

2. لكي تكون غاية الدالة $f(x)$ معرّفة عندما تقترب x من قيمة معّينة ولتكن a فأن الأمر يقتضي أن تكون غاية الدالة معرّفة عندما تقترب x من a من جهة اليسار($x \to a^-$)وأن تكون معرّفة أيضاً عندما تقترب x من a من جهة اليمين ($x \to a^+$)وأن تكون الغايتان متساويتين ، ونعبّر عن ذلك رياضياً بالرموز كما يأتي :-

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \ (\text{معرّفة}) \ , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \ (\text{معرّفة})$$

فإذا كانت $L_1 = L_2$ فأن للدالة $f(x)$ غاية ولتكن L حيث $L_1 = L_2 = L$ عندما تقترب x من a ونكتب عندئذ :-

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

والتي تقرأ (غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to a$ تساوي L).

[2-2] المبرهنات الاساسية للغاية

إن الاسلوب السابق لتعيين الغاية أسلوب مطول ولذلك سوف نتناول بعض المبرهنات التي تسهل علينا إيجاد الغاية لدالة معينة عند عدد معين دون الخوض في براهين المبرهنات هذه .

مبرهنه1(وحدانية الغاية) : غاية الدالة عند عدد معين (إن وجدت) فأنها وحيدة أي انه إذا كانت كل من

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

موجودة فإن :-

$$L_1 = L_2$$

مثال 2:- لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 12 & \forall\ x < 1 \\ 14x - 1 & \forall\ x \geq 1 \end{cases}$$

إن إيجاد غاية الدالة هذه عندما $x \to 1$ (إن وجدت) يقتضي النظر الى تعريف الدالة والتي يبدو أن لها تعريفين الاول عندما $x < 1$ والثاني عندما $x \geq 1$ ويترتب على ذلك (حسب مبرهنة وحدانية الغاية) أن تكون الغاية معرفة عند الاقتراب من العدد(1) من جهة اليسار ومن جهة اليمين وأن تكونا متساويتين.

$$\lim_{x\to 1^+} (14x - 1) = 14(1) - 1 = 13 = L_1$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2 + 12) = 1^2 + 12 = \quad 13 = L_2$$

$$\therefore \ \lim_{x\to 1} f(x) = 13$$

مثال 3:- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \forall\, x \geq 2 \\ 5x - 2 & \forall x < 2 \end{cases}$ ، أبحث إمكانية وجود الغاية عندما $x \to 2$

الحل:-

$$\lim_{x \to 2^+} (2x^2 + 1) = 2(2)^2 + 1 = 9 = L_1$$

$$\lim_{x \to 2^-} (5x - 2) = 5(2) - 2 = 8 = L_2$$

$$\because L_1 \neq L_2$$

اي إنه ليس للدالة غاية عندما $x \to 2$ (لعدم وحدانية الغاية) .

مبرهنه2 : غاية الدالة الثابتة عند عدد معين تساوي الثابت نفسه أي :-

إذا كانت $f(x) = C$ حيث $C \in \mathbb{R}$ فأن

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} C = C$$

مثال 4:-

$$1)\ \lim_{x \to a} 5 = 5 \qquad 2)\ \lim_{x \to a} \sqrt{3} = \sqrt{3} \qquad 3)\ \lim_{x \to a} (-2) = -2$$

مبرهنه3 : غاية دالة كثيرة الحدود عند عدد معين تساوي صورة ذلك العدد تحت تأثير قاعدة أقتران تلك الدالة أي إنه إذا كانت $f(x)$ قاعدة إقتران لدالة كثيرة الحدود فإن

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

مثال 5:- لتكن $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ دالة كثيرة الحدود ، جد :- $\lim_{x \to -2} f(x)$

الحل:-

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 4x^2 + 5x - 1)$$
$$= (-2)^3 - 4(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -35$$

[2-3] جبر الغايات:-

إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$, $\lim_{x \to a} g(x) = M$

فإن:-

$$\boldsymbol{a)\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M}$$

أي إن غاية (مجموع) أو (فرق بين) دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي (مجموع) أو(الفرق بين) غايتي الدالتين عند ذلك العدد.

$$\boldsymbol{b)\lim_{x \to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x \to a} f(x).\lim_{x \to a} g(x) = L.M}$$

أي ان غاية حاصل ضرب دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي حاصل ضرب غايتي الدالتين عند ذلك العدد.

$$c)\lim_{x\to a}[\,k.f(x)\,] = k.\lim_{x\to a}f(x) = k.L \quad ,\forall k \in \mathbb{R}$$

أي أن غاية حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة لها غاية عند عدد معين يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت في غاية الدالة عند العدد نفسه.

$$d)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad , \quad M \neq 0$$

أي أن غاية ناتج قسمة دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي ناتج قسمة غايتي الدالتين عند العدد نفسه بشرط إن غاية الدالة المقسوم عليها لا تساوي صفراً.

$$e\,)\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad , \quad (\lim_{x\to a} f(x) \geq 0)$$

أي إن غاية الدالة الواقعة تحت جذر مهما كانت رتبته عند عدد معين تساوي جذر غاية تلك الدالة عند العدد نفسه بشرط ان قيمة الغاية ليست سالبة .

مثال 6:- إذا كانت $g(x) = x^3 + 2 \quad , f(x) = x^2 + 2x + 1$ جد

1) $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$ 2) $\lim_{x\to 1}[f(x) - g(x)]$ 3) $\lim_{x\to 1}[f(x).g(x)]$

4) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$ 5) $\lim_{x\to 1}[7.f(x)]$ 6) $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{2x^2 + 9}$

الحل:-

$$\lim_{x\to 1}f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 2x + 1) = 1^2 + 2(1) + 1 = 4$$

$$\lim_{x\to 1}g(x) = \lim_{x\to 1}(x^3 + 2) = 1^3 + 2 = 3$$

$$1)\ \lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) = 4 + 3 = 7$$

$$2)\ \lim_{x\to 1}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x) = 4 - 3 = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to 1} f(x).\lim_{x\to 1} g(x) = 4.3 = 12$$

$$4)\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{4}{3}$$

$$5)\lim_{x\to1}[7.f(x)] = 7.\lim_{x\to1} f(x) = 7.4 = 28$$

$$6)\lim_{x\to3}\sqrt[3]{2x^2+9} = \sqrt[3]{\lim_{x\to3}(2x^2+9)} = \sqrt[3]{(2(3)^2+9)} = \sqrt[3]{27} = 3$$

لنناقش الان غاية الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ عندما تقترب قيمة x من 1 فلو عوضنا عن x بالعدد1 لاصبح لدينا $\frac{1^2-1}{1-1}$ والتي تساوي $\frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة . من هذا نستنتج ان التعويض المباشر قد يفشل أحياناً في إيجاد قيمة الغاية ويمكننا التوصل الى قيمة الغاية بتحليل المقدار x^2-1 ألى عوامله كما يلي :-

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 1+1 = 2$$

وفيما يأتي أمثلة اخرى يفشل فيها التعويض المباشر:-

مثال 7:- جد قيمة $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

الحل:

$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال 8:- جد قيمة $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$

الحل:-

$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^2+x+1) = (1^2+1+1) = 3$$

مثال 9:- جد قيمة $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

الحل:-

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to1}\frac{1-1}{\sqrt{1-1}} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}.\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to1}\sqrt{x-1} = \lim_{x\to1}\sqrt{1-1} = 0$$

مثال 10:- جد قيمة $\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$

الحل:-

$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-5}}{x-5} = \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{5-5}}{5-5} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}.\sqrt{x-5}}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-5}}=\frac{1}{\sqrt{5-5}}=\frac{1}{0}$$ وهي كمية غير معرفة

وعليه فإن الدالة التي قاعدة إقترانها $\frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$ ليس لها غاية عند $x=5$

مثال 11:- لتكن $f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x>1\\ 2x+2, & x\le 1\end{cases}$ هل للدالة غاية عندما $x\to 1$

الحل:-

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+3)=1^2+3=4=L_1$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+2)=2(1)+2=4=L_2$$

$$\because\ L_1=L_2=4\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 1}f(x)=4$$

ملاحظة : لا يشترط إنتماء العنصر إلى مجال الدالة عند أيجاد الغاية

مثال 12:- لتكن $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \forall\, x\le 2\\ x+1 & \forall\, x>2\end{cases}$ ، هل للدالة غاية عندما

$1)\,x\to 2$ $\qquad$ $2)\ x\to 0$

الحل:-

$$1)\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3=L_1$$

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2}(x^2-3)=2^2-3=1=L_2$$

$\because\ L_1\ne L_2\ \Rightarrow$ الدالة ليس لها غاية عند $x=2$

$$2)\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2-3)=0^2-3=-3$$

أي إن غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد 0 موجودة وقيمتها 3 –

تمارين(2-1)

1. جد قيمة الغايات الآتية (إن وجدت) .

$a)\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x+5\ )$

$b)\lim\limits_{x\to 2}(3x+5\ )$

$c)\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+3}{x+6}$

$d)\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-6}{x+5}$

$e)\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

$f)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

$g)\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$

$h)\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{5x^2+3}$

$i)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$

$j)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

$k)\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x-5}}$

$l)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

2. ليكن $f(x)=\begin{cases} x+3 & \forall\ x>2 \\ 2x-1 & \forall\ x\le 2\end{cases}$ ، جد قيمة الغاية (إن وجدت) في الحالات الآتية:-

$a) x\to 2$
$b) x\to 0$
$c) x\to 5$

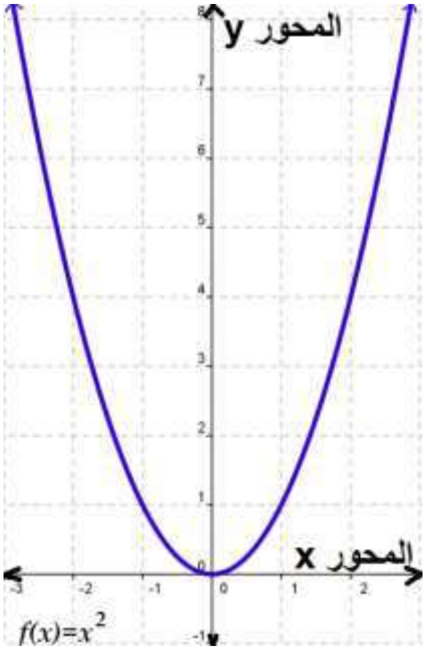
3. ليكن $f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & \forall\ x<1 \\ x+2 & \forall\ x\ge 1\end{cases}$ ، هل للدالة غاية عندما $x\to 1$

4 . إذا كانت $g(x)=x^2-4\ \ ,\ \ f(x)=x+1$ ، جد ما يلي :-

$a)\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$ $\quad b)\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-g(x)]$ $\quad c)\lim\limits_{x\to 2}[f(x).g(x)]$

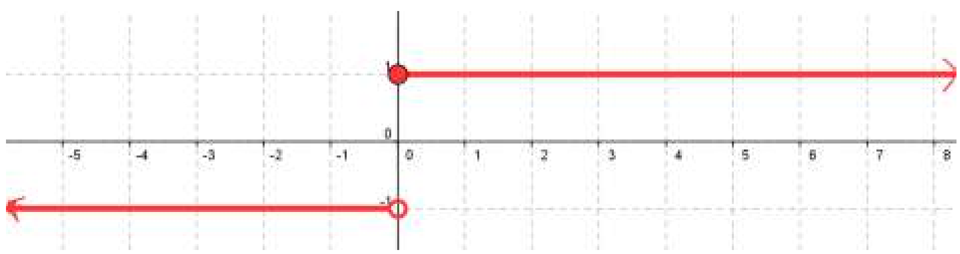
$d)\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad e)\lim\limits_{x\to 2}[7.f(x)]$ $\quad f)\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{[f(x)]^4}$

[2-4] الاستمرارية (Continuity)



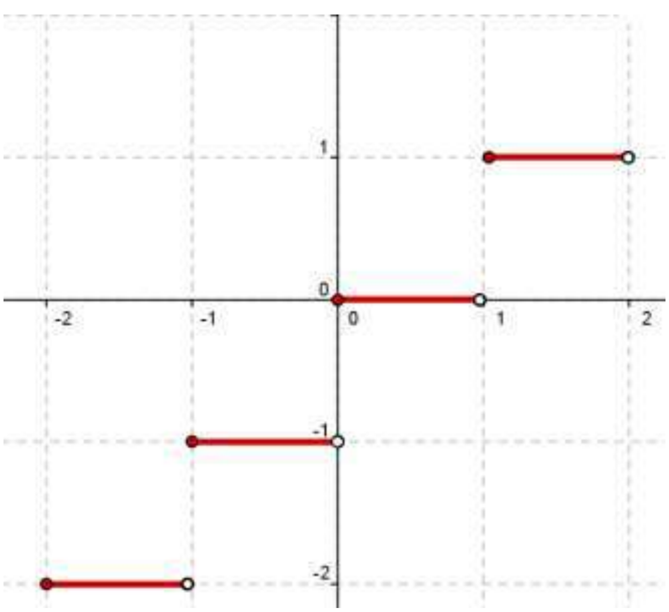
لتوضيح فكرة الاستمرارية للدوال نقول إن الدالة المستمرة في جميع نقاطها تتيح لنا عند رسم مخططها البياني إتمام رسمها على الورق دون رفع القلم عن الورقة كما في الدالة $f(x) = x^2$ والتي يبين الشكل المجاور المخطط البياني لها . كما إن هنالك بعض الدوال التي تكون مستمرة في جميع نقاطها عدا نقطة واحدة أو أكثر والتي عندما نحاول رسم المخطط البياني لها نضطر لرفع القلم عن الورقة مرة أو أكثر . مثل هذه الدوال تسمى بالدوال غير المستمرة عند نقطة أو أكثر من نقاطها وخير مثال عليها الدالة الآتية والتي تسمى بدالة الاشا رة وهي دالة تعطي قيمة (-1) إذا كانت قيمة x سالبة وتعطي قيمة $(+1)$ إذا كانت قيمة x موجبه أو صفراً وفي ادناه الصيغة الرياضية لهذه الدالة مع مخططها البياني

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & \forall x < 0 \\ 1, & \forall x \geq 0 \end{cases}$$



وكذلك الدالة المسماة بالدالة السلمية (نسبة الى مخططها البياني والذي يشبه السلم) والتي تعطي قيمة اكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x والمبينه صيغتها الرياضية مع مخططها البياني في الشكل المجاور

اكبرعددصحيح اصغر او يساوي
$f(x) = [x] = x$



[2-5] استمرارية الدالة عند نقطة معينة

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ بأنها دالة مستمرة عند النقطة التي إحداثيها x هو $x = a$ إذا تحقق ما يلي :-

1) $f(a)$ موجودة وحقيقية

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ موجودة ووحيدة

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة:- إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من الشروط الواردة بالتعريف أعلاه فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = a$

مثال 13:- ليكن $f(x) = x^2 + 5x + 2$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 3$

الحل :- إن أوسع مجال لهذه الدالة هو ($\mathbb{R}$) ((لأنها كثيرة الحدود)) .

$1) f(3) = 3^2 + 5 \times 3 + 2 = 9 + 15 + 2 = 26$ موجودة وحقيقية

$2) \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 5x + 2) = 3^2 + 5 \times 3 + 2 = 9 + 15 + 2 = 26$

اي ان الغاية موجوده ووحيدة

$3) \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 26$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 3$

مثال 14:- إبحث أستمرارية الدالة $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1}$ عند $x = 1$

الحل:-

$1) f(1) = \frac{1^2+3\times1-4}{1-1} = \frac{1+3-4}{1-1} = \frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرّفة

ونظراً لعدم تحقق الشرط الاول من شروط إستمرارية الدالة عند نقطة ما لذلك فإن الدالة غير مستمرة عند $x = 1$ ولا حاجة للتحقق من بقية الشروط الاخرى .

مثال 15:- ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x < 2 \\ x + 3 & \forall x \geq 2 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 2$

الحل:-

$1)(2) = 2 + 3 = 5$ موجودة وحقيقية

$2) \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$\because \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$

أي ان الغاية موجودة ووحيدة

$3) \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(2) = 5$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال 16:- $f(x) = \begin{cases} x+1 & \forall x > 1 \\ 5-x & \forall x \le 1 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 1$

الحل : $1) f(1) = 5 - 1 = 4$ موجودة وحقيقية

$$2)\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1} (x+1) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1} (5-x) = 5-1 = 4$$

$$\because\ \lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

أي ان غاية الدالة غير موجودة كونها ليست وحيدة وهذا يعني إن الدالة $f(x)$ غيرمستمرة عند $x = 1$

مثال 17:- لتكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2} & ، x \neq 2 \\ 12 & \forall x = 2 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند$x = 2$

الحل: $1) f(2) = 12$ موجودة وحقيقية

$$2)\ \lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2} (x^2+2x+4) = 2^2 + 2\times2 + 4 = 4+4+4 = 12$$

اي ان الغاية موجودة ووحيدة

$$3)\ \lim_{x\to2} f(x) = f(2) = 12$$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال 18:- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \forall\ x > 2 \\ 12 & ،\ x = 2 \\ 5x-3 & \forall\ x < 2 \end{cases}$ ، إبحث إستمرارية الدالة عند$x = 2$

الحل: $1) f(2) = 12$ موجودة وحقيقية

$$2)\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2} (2x+3) = 2\times2 + 3 = 7$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2} (5x-3) = 5\times2 - 3 = 10 - 3 = 7$$

$$\because\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^-} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x\to2} f(x) = 7$$

أي ان الغاية موجودة ووحيدة

$$3)\ \lim_{x\to2} f(x) \neq f(2)$$

ونظراً لعدم تحقق الشرط الثالث فإن الدالة ليست مستمرة عند $x = 2$

مثال 19:- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \forall x \ge 1 \\ 2x+b & \forall\ x < 1 \end{cases}$ فإذا علمت إن الدالة مستمرة عند $x = 1$ جد قيمة $b \in \mathbb{R}$

الحل :- بما ان الدالة مستمرة فإن الدالة لها غاية وحيدة أي

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to1} (2+x^2) = \lim_{x\to1} (2x+b)$$

$$2 + 1^2 = 2 \times 1 + b$$
$$3 = 2 + b$$
$$b = 3 - 2 = 1$$

مثال 20:- لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 9 & \forall x < 3 \\ 3x + b & \forall x \geq 3 \end{cases}$ فإذا علمت إن الدالة مستمرة عند $x = 3$ ، $f(5) = 3$ ، جد قيمة $a, b \in \mathbb{R}$

الحل:- بما ان الدالة مستمرة فإن الدالة لها غاية وحيدة أي

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$
$$\lim_{x \to 3} (x^2 + ax + 9) = \lim_{x \to 3} (3x + b)$$
$$3^2 + 3a + 9 = 3 \times 3 + b$$
$$18 + 3a = 9 + b$$
$$3a - b = -9 \ldots\ldots (1)$$

وبما ان $f(5) = 3$ (لاحظ ان $5 > 3$)

$$3(5) + b = 3 \Rightarrow 15 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -12}$$
$$3a - (-12) = -9 \Rightarrow 3a = -9 - 12 \Rightarrow 3a = -21 \Rightarrow \boxed{a = -7}$$

تمارين(2-2)

1. ليكن $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$ ؟

2. ليكن $f(x) = \frac{{}^2-3}{x^2+5}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 0$ ؟

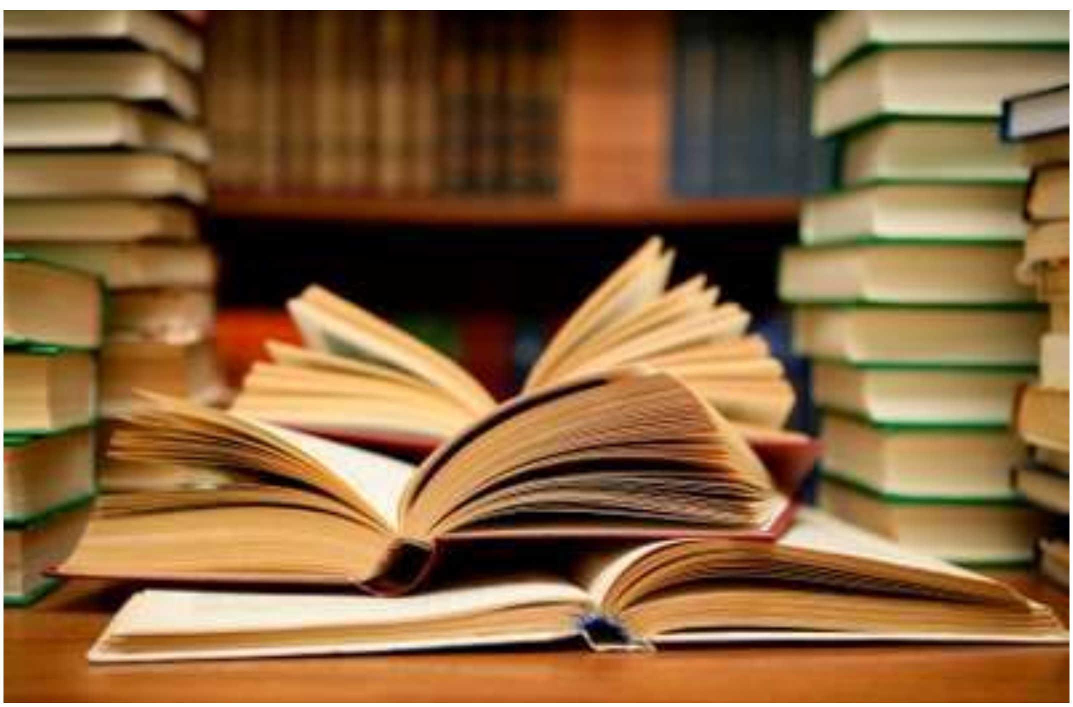
3. ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x \geq \sqrt{3} \\ 7 - x^2 & \forall x < \sqrt{3} \end{cases}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = \sqrt{3}$؟

4. ليكن $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \forall x > 2 \\ 5 - x^2 & \forall x \leq 2 \end{cases}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$؟

5. ليكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x} & \forall x > -1 \\ 7 & ، x = -1 \\ 2x^2 - 3 & \forall x < -1 \end{cases}$ ، إبحث أستمرارية الدالة عند $x = -1$.

6 . ليكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \forall x \geq 1 \\ k & \forall x < 1 \end{cases}$ ، جد قيمة k اذا علمت ان الدالة مستمرة عند $x = 3$.


الفصل الثالث
حساب التفاضل



الفصل الثالث
حساب التفاضل

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا ان يكون قادراً على ان :-

1. يدرك أهمية علم التفاضل وتطبيقاته في مختلف العلوم .
2. يدرك ألمفهوم الأساسي للمشتقة كونها غاية لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ ويستخدم هذا التعريف في حل مسائل إيجاد الغاية .
3. ستوعب التفسير الهندسي للمشتقة ويستعمله لأيجاد معادلة المماس للمنحني عند نقطة التماس .
4. يستخرج المشتقة بإستعمال القوانين ويتعلم إستخراج المشتقات من الرتب العليا .

الفصل الثالث
حساب التفاضل

[3-1] نبذة تاريخية

ظهر علم التفاضل والتكامل كأحد فروع علم الرياضيات نتيجة لتطور الفكر الرياضي عموماً في منتصف العقد التاسع من القرن السابع عشر حيث نشر كل من إسحق نيوتن وجتفريد ولهلم ليبنتز بصورة مستقلة إكتشافهما لحساب التفاضل والتكامل. إلا إن هنالك إشارات الى إن عالم الرياضيات البريطاني إسحق بارو (1630-1677م) يعتبر هو المؤسس الاول لعلم التفاضل والتكامل وإن أسحق نيوتن كان أحد تلامذته، حيث نشر العديد من المحاضرات في هذا العلم في ما نطلق عليه اليوم ميل مماس المنحني (*Slope of the tangent to a curve*).

يعتقد البعض إن التفاضل قد سبق التكامل كون التكامل عملية عكسية للتفاضل وهذا الاعتقاد غير صحيح فقد أظهرت الادلة التاريخية إستخدام التكامل بطرق غير مباشرة في حساب المساحات والحجوم كما كان في عهد المصريين القدماء في طريقة حساب حجم الهرم الناقص ، تبعهم اليونانيون في إستخدام طريقة الاستنزاف لحساب المساحات والحجوم ثم أزدهرت هذه الطريقة في عهد ((أرشميدس)) الذي أدخل فكرة الخبرة المكتسبة والتي تمثل جزءاً أساسيا في علم التكامل ثم إنتقلت طريقة الاستنزاف الى الصين حيث عملوا جاهدين على أيجاد مساحة الدائرة وحجم الكرة. وفي العصر الاسلامي أستخدم الحسن ابن الهيثم طريقة تكاملية لاستنباط الصيغة العامة لمجموع متتالية حسابية من الدرجة الرابعة، ثم ابتدع الصينيون معادلات تتعامل مع التكامل وفي الهند بدأ الاشتقاق بالظهور على يد عالم هندي وصف التغيرات المتناهية في الصغر ... كما تناول آخرون متسلسلات شبيهه بمتسلسلة تايلور.

[3-2] علم التفاضل والتكامل (*Calculus*)

هو فرع من فروع علم الرياضيات يدرس النهايات (الغايات) والاشتقاق والتكامل (عكس الاشتقاق) والمتسلسلات اللانهائية، وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدوال وتحليلها ، وينقسم هذا العلم على فرعين رئيسيين هما التفاضل (*Differentiation*) والتكامل (*Integration*) ويربط بينهما ما يعرف بالنظرية الاساسية للتفاضل والتكامل.

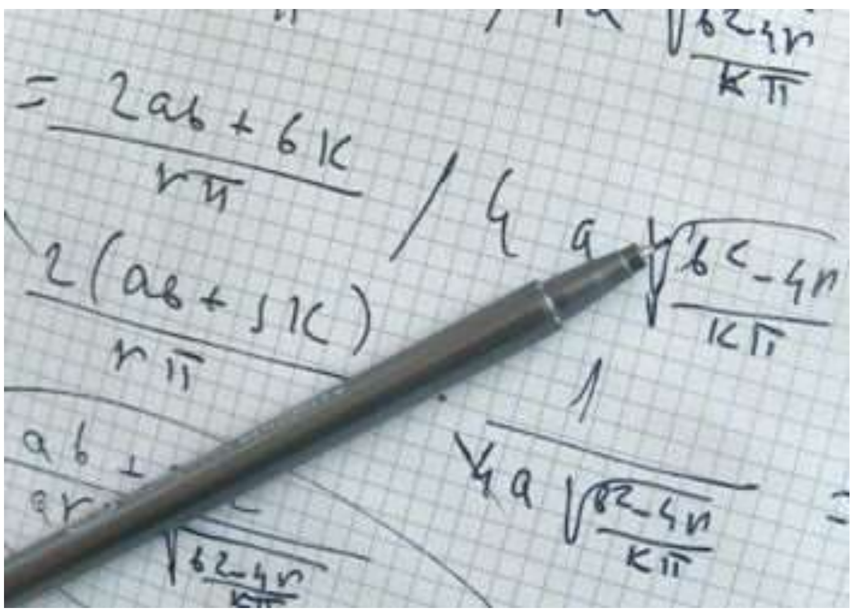
إن المبدأ الاساسي لحسبان التفاضل يعتمد إعتماداً كبيراً على مفهوم الغاية والذي تناولناه بالبحث في الفصل السابق كما إن لعلم التفاضل والتكامل تطبيقات لا حصر لها في علوم الفيزياء الكلاسيكية والحديثة وعلوم الكيمياء، الهندسة، الاقتصاد، الحاسوب .. وحتى الطب وبعض العلوم السياسية واليك عزيزي الطالب بعض الامثلة :-

- حساب أطوال المنحنيات ، المساحات ، الحجوم .
- حساب مركز الثقل، عزم القصور الذاتي، كمية الحركة، التعجيل، السرعة، الازاحة، الشغل، الطاقة.
- حساب التوزيعات والاحتمالات المنتظمة مثل (إحتمالية فيرمي في أشباه الموصلات، إنتشار الجراثيم في وسط معين تحت ظروف بيئية معينة) .
- حل المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها في الانظمة الخطية مثل البندول، دوائر الرنين الكهربائية وأنظمة التحكم الكهروميكانيكية .

- حساب الثوابت الرياضية الى درجة عالية من الدقة مثل قيمة الثابت π وأساس اللوغاريتم الطبيعي e.

يستخدم في علم التفاضل والتكامل عدد من الرموز عند التعامل مع المصطلحات والمتغيرات المختلفة وفي أدناه بعضاً منها :-

1. $f(x)$ الدالة
2. Δx التغير في قيمة x
3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ الغاية عندما التغير في قيمة x (أيΔx)الصفر صغير ويقترب من
4. $\frac{dy}{dx}$, y' , $f'(x)$ المشتقة الاولى
5. $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'', $f''(x)$ المشتقة الثانية
6. m ميل المماس للمنحني



[3-3] تعريف المشتقة

لتكن $y = f(x)$ دالة معرفة ومستمرة عند قيمة معينة ولتكن x فإذا كانت الغاية

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

موجودة عند تلك القيمة x فإن هذه الغاية تسمى مشتقة الدالة $y = f(x)$ ويرمز لها بأحد الرموزالآتية $f'(x)\ , y'\ , \frac{dy}{dx}$

ملاحظة:-

يظهر من تعريف المشتقة أعلاه أن هناك تغيراً صغيراً في قيمة المتغير x مقداره Δx أدى الى حدوث تغيير صغير في قيمة الدالة $f(x)$ مقداره $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ وأن حاصل قسمة Δy على Δx يمثل معدل تغير الدالة ، وعندما تؤخذ الغاية لهذا المعدل عندما تقترب Δx من الصفر فاننا بذلك نحصل على معدل التغير الآني أو اللحظي للدالة ، وعليه تعرّف مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالصورة

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

على أنها معدل التغير الآني (أو اللحظي) للدالة .

مثال 1:- إذا كانت $y = f(x) = 2x$ **جد المشتقة بطريقة التعريف .**

الحل:-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\,x+\Delta x) - 2x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

مثال 2:- أذا كانت $y = f(x) = x^2 + 3$ جد المشتقة بطريقة التعريف.

الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 3 - (x^2+3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[2x + (\Delta x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [2x + (\Delta x)]$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

مثال 3- إذا كانت $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ جد المشتقة بطريقة التعريف.

الحل:-

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) + 5 - (2x^2 - 3x + 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] - 3x - 3\Delta x + 5 - 2x^2 + 3x - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x - 2x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 3)$$

$$= (4x + 0 - 3)$$

$$= 4x - 3$$

مثال 4:- أذا كانت $y = f(x) = \frac{3}{x}$ جد المشتقة عندما $x = 3$ بطريقة التعريف .

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x+\Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-3\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3\Delta x}{x(x+\Delta x)} \times \frac{1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3}{x(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{-3}{x(x+0)} = \frac{-3}{x^2}$$

وعندما $x = 3$ فان:-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{3^2} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

[3-4] قواعد ايجاد المشتقة

في هذا البند سنقدم بعض القواعد التي تسهل علينا إستخراج مشتقة الدالة عند نقطة في مجالها بدون إستخدام التعريف ، وبرهنة هذه القواعد ممكن بإستخدام التعريف إلا إننا سوف نقبل بها بدون برهان وهي:-

1) مشتقة الدالة الثابتة $y = f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي ثابت هي $\frac{dy}{dx} = y' = 0$

مثال 8: -

إذا كانت $y = 7$ فإن $y' = 0$

وإذا كانت $f(x) = -5$ فإن $f'(x) = 0$

وإذا كانت $y = \frac{1}{2}$ فإن $y' = 0$

وإذا كانت $h(x) = \sqrt{3}$ فإن $h'(x) = 0$

2) مشتقة $y = f(x) = x^n$ تساوي $y' = f'(x) = nx^{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{R}$

مثال 9:-

إذا كانت $y = x^3$ فإن $y' = 3x^2$

وإذا كانت $f(x) = x^5$ فإن $f'(x) = 5x^4$

وإذا كانت $y = x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1\,x^{1-1} = x^0 = 1$

وإذا كانت $g(x) = x^{-4}$ فإن $g'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

3) مشتقة $y = f(x) = a.x^n$ تساوي $y' = f'(x) = a.nx^{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{R}$

مثال 10:-

إذا كانت $y = 3x^5$ فإن $y' = 15x^4$

وإذا كانت $y = 5.\sqrt[3]{x^2}$ فإن المشتقة تستخرج كما يلي :-

$$y = 5 \times x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = 5 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{-1}{3}} = \frac{10}{3.x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{3.\sqrt[3]{x}}$$

4) مشتقة مجموع او طرح دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي حاصل جمع اوطرح مشتقتيهما في تلك النقطة

مثال 11:-

إذا كانت $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$ فإن

$$y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} - 0$$

$$y' = -12x^{-4} - 10x + 7$$

5) مشتقة حاصل ضرب دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانيه × مشتقة الدالة الاولى

مثال 12:-

إذا كانت $f(x) = (3x-2)(4x+1)$ فإن

$$f'(x) = (3x-2) \times 4 + (4x+1) \times 3$$

$$f'(x) = 12x - 8 + 12x + 3$$

$$f'(x) = 24x - 5$$

6) مشتقة حاصل قسمة دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي

<u>المقام × مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام</u>

مربع المقام

مثال 13:-

إذا كانت $x \neq \frac{-2}{3}$, $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن

$$f'(x)=\frac{(3x+2)\times 2-(2x+1)\times 3}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{6x+4-6x-3}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{1}{(3x+2)^2}$$

7) مشتقة الدالة بالصورة $f(x)=[f(x)]^n$ **تساوي** $f'(x)=n.[f(x)]^{n-1}.f'(x)$
أي ان القوس المرفوع لأس نشتقه من الخارج ثم من الداخل

مثال 14:- إذا كانت $y=4\times(2x^2+3x-2)^5$ فإن
$$y'=20(2x^2+3x-2)^4\times(4x+3)$$

مثال 15- **جد المشتقة الاولى الدوال الآتية :-**

1) $y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}$ 2) $f(x)==\frac{x^3-1}{x^4+1}$ 3) $y=\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$

4) $g(x)=(x^3-2x^2)^4$ 5) $y=\frac{x}{2}-\frac{5x^3}{2}$ 6) $h(x)=\sqrt[3]{(1+x^2)^5}$

7) $y=\frac{5}{x^2-7x+3}$ 8) $f(x)=(4x^2-3)^2.(x+5)$ 9) $y=\frac{7}{x^9}$

10) $y=\sqrt{\frac{4}{x^3}}-\sqrt{3x}$

11) $y=\frac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$

12) $f(t)=\sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}}$

الحل:-

1) $y=\sqrt[5]{x^{13}+13+x^{-13}}=(x^{13}+13+x^{-13})^{\frac{1}{5}}$
$\quad y'=\frac{1}{5}(x^{13}+13+x^{-13})^{\frac{-4}{5}}(13x^{12}-13x^{-14})$

2) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^4+1}\ \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2(x^4+1)-4x^3(x^3-1)}{(x^4+1)^2}$

3) $y=\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)^2\ \Rightarrow\ y'=2\left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)\left[\frac{(x^2-3x)-(2x-3)(x+2)}{(x^2-3x)^2}\right]$

4) $g(x)=(x^3-2x^2)^4\ \Rightarrow g'(x)=4(x^3-2x^2)^3(3x^2-4x)$

5) $y=\frac{x}{2}-\frac{5x^3}{2}\ \Rightarrow y'=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}(\,3x^2)=\frac{1}{2}-\frac{15}{2}x^2$

6) $h(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^5} \Rightarrow h(x) = (1+x^2)^{\frac{5}{3}}$

$h'(x) = \frac{5}{3}\ (1+x^2)^{\frac{2}{3}}(2x) = \frac{10x}{3}(1+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{10x}{3}\ \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$

7) $y = \frac{5}{x^2-7x+3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2-7x+3).0-5(2x-7)}{(x^2-7x+3)^2} = \frac{-10x+35}{(x^2-7x+3)^2}$

8) $f(x) = (4x^2-3)^2 \times (x+5)$

$f'(x) = (4x^2-3)^2 \times 1 + (x+5) \times 2(4x^2-3)^1 \times 8x$

$= (4x^2-3)^2 + 16x\,(4x^2-3) \times (x+5)$

$= (4x^2-3)[20x^2+80x-3]$

9) $y = \frac{7}{x^9} \quad \Rightarrow y = 7x^{-9} \quad \Rightarrow y' = -63x^{-10} \quad \Rightarrow y' = \frac{-63}{x^{10}}$

10) $y = \sqrt{\frac{4}{x^3}} - \sqrt{3x} \Rightarrow y = 2x^{\frac{-3}{2}} - \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$

$y' = 2 \times \frac{-3}{2} \times x^{\frac{-5}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ x^{\frac{-1}{2}} = \frac{-3}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{x^5}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

11) $y = \frac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$

$$y' = \frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}} \times 4x - (\ 2x^2-3) \times \frac{1}{3}(x^2+7)^{\frac{-2}{3}} \times 2x}{\left[(x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$$

$$y' = \frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}[4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}]}{(x^2+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = \frac{2x(2 - \frac{1}{3}(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

12) $f(t) = \sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}} = \left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{-1}{2}} \times \frac{6t(2t+5)-2(3t^2-4)}{(2t+5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}} \times \frac{6t^2+30t+8}{(2t+5)^2}$$

تمارين(1-3)

1. بأستخدام التعريف جد المشتقة الاولى لكل من الدوال الآتية:-

a) $y = x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = 2x - 7$

c) $f(t) = 3t + 7$

2. جد المشتقة الاولى لكل من الدوال الآتية :-

a) $y = (2x^3 - 7)(3x^2)$

b) $f(x) = \frac{2x^2-5}{3x}$

c) $y = \frac{2}{3x^2-7x+3}$

d) $g(x) = \frac{5}{4x^3-3x^2}$

e) $y = \frac{1}{x+2} - x$

f) $f(t) = \frac{(3t-2)(t+7)}{3t-1}$

g) $y = \frac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$

h) $h(x) = (2x^4 - 1.9)^3$

i) $y = \frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$

j) $g(x) = (2x^3 - 4x + 7)^{-2}$

k) $y = \left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$

l) $h(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$

m) $y = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$

n) $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$

o) $y = \frac{3}{(2x+4)^3}$

p) $g(x) = \frac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$

q) $y = x^3 . (5x^2)^{\frac{-2}{3}}$

r) $h(x) = 2x^{-3} + 7x^{-5}$

s) $y = (4x^2\sqrt{x^3})^{\frac{1}{4}}$

t) $f(t) = \sqrt{\frac{t-2}{t^2+5}}$

3. في كل مما يأتي ، جد معادلة المماس للمنحني عند النقطة المعطاة ازاء كل دالة:-

a) $\boldsymbol{f}(x) = \frac{3x^2}{3x-7} \quad ; (2, -12)$

b) $f(x) = (16 - x^4)^3 \quad ; (2\ ,0)$

c) $f(x) = \sqrt{-1 - 2x + 3x^2} \quad ; \quad (-1, 2)$

[3-5] المشتقات من الرتب العليا

تعرف المشتقة الثانية للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ بأنها مشتقة المشتقة الاولى $\boldsymbol{f'(x)}$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق مرتين ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^2y}{dx^2}, f''(x), y''$$

وتعرف المشتقة الثالثة للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ بأنها مشتقة المشتقة الثانية $\boldsymbol{f''(x)}$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق ثلاث مرات ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^3y}{dx^3}, f'''(x), y'''$$

وتعرف المشتقة الرابعه للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ بأنها مشتقة المشتقة الثالثة $\boldsymbol{f'''(x)}$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق اربع مرات ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^4y}{dx^4}, f''''(x), y''''$$

بشكل عام تعرف المشتقة من الرتبة $\boldsymbol{n}$ للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ بأنها مشتقة المشتقة $\boldsymbol{(n-1)}$ للدالة بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق $\boldsymbol{n}$ من مرات ويرمز لها $\frac{d^ny}{dx^n}$

مثال 16:- جد $\frac{d^3y}{dx^3}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y = 6x^5$

الحل:-

$$\frac{dy}{dx} = 30x^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(30x^4) = 120x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}(120x^3) = 360x^2$$

تمارين(2-3)

أحسب المشتقة الثانية للدوال الآتية عند القيم المعطاة مع كل دالة

a) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1 \;\; ; \quad x = 1$

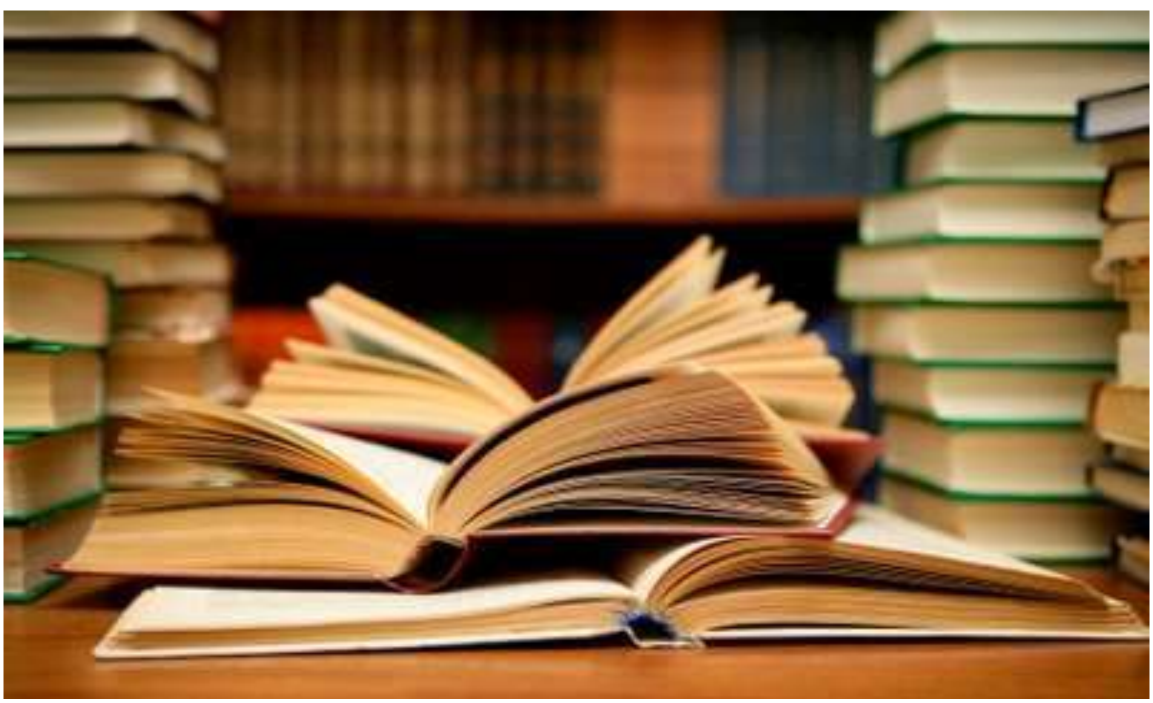
b) $f(x) = \frac{4x^2}{3x-7} \quad ; \;\; x = 2$

c) $f(x) = (4-x)^{\frac{5}{4}} \quad ; \quad x = 3$

d) $f(x) = \sqrt{2\,x+3} \quad ; \;\; x = -1$

e) $f(x) = \frac{-5}{x^3} \quad ; \;\; x = -1$

الفصل الرابع

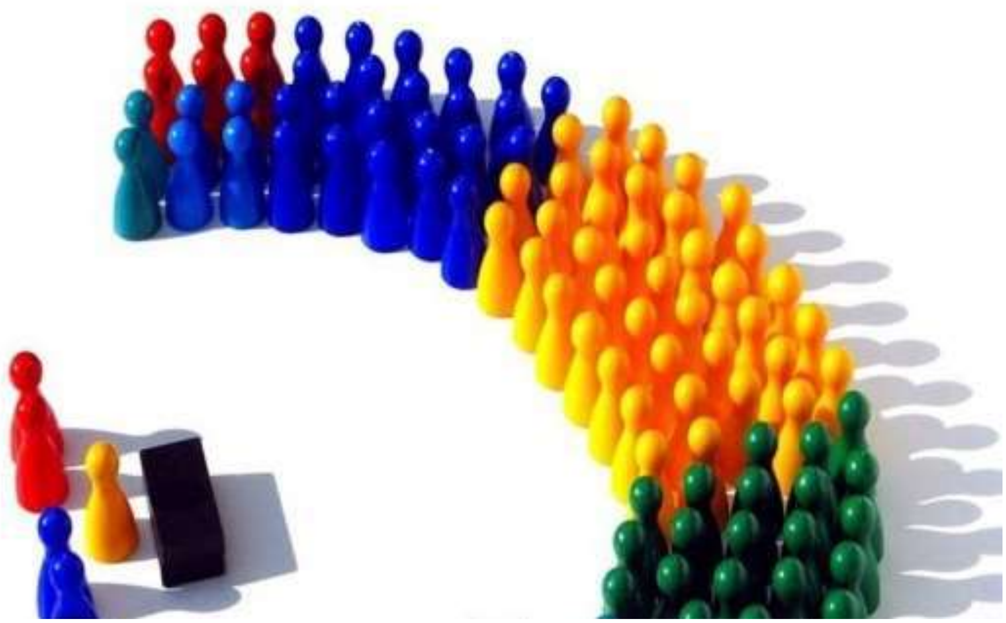


الفصل الرابع
المصفوفات والمحددات

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1. يدرك مفهوم المصفوفات ويتعرف على معظم أنواعها المهمة .
2. يتقن إجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب على المصفوفات.
3. يستخرج قيمة محددة المصفوفة من الرتب 2×2 و 3×3 .
4. ينجز حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين وفقاً لطريقة المحددات .
5. ينجز حل نظام خطي مؤلف من 3 معادلات بثلاثة متغيرات وفقاً لطريقة المحددات .



الفصل الرابع
المصفوفات والمحددات

[4-1] المقدمة

يبدو أن أول ذكر للمصفوفات ورد في كتاب صيني يدعى ((تسعة كتب في الحساب)) قبل بداية التاريخ الميلادي. وكان للعالم الياباني (سيكي كووا *Seki Kowa*) عام 1683م وللعالم الألماني غوتفريد فيلهلم ليبنتز(*Leibniz, Gottfried*) عام 1693 م الفضل في إكتشاف المصفوفات والمحددات من خلال إستخدام المعلومات الواردة في الكتاب الصيني المذكور أعلاه لحل المعادلات الانية من الدرجة الاولى . وفي العام 1750م توصل العالم ((كرايمر)) الى طرق حل المعادلات الخطية بإستخدام المحددات تلاه العالم ((كيلي)) عام 1857 الذي توصل الى ما يدعى الان بجبر المصفوفات .

إن المصفوفات لغة وأداة رياضية هامة لها دور بارز في الكثير من التطبيقات الرياضية والفيزياوية والهندسية والإحصائية والإقتصادية فضلاً عن كونها تعد الاسلوب الرئيس لتزويد الحاسبات الالكترونية بالبيانات، وقد جاء الفصل هذا محتوياً على بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالموضوع هذا.

[4-2] مفاهيم المصفوفات

[4-2- 1] تعريف المصفوفة (*Matrix*)

المصفوفة هي ترتيب من الأعداد أو الرموز مكون من صفوف (Rows) وأعمدة (Columns) محصورة بزوج من الأقواس أما بالشكل $\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{pmatrix}$ إذا كانت المصفوفة مكونة من (m) صف ، (n) عمود فنقول إن المصفوفة من الرتبة ($m \times n$) حيث إن كل من m ، n عدد صحيح موجب .

الاعداد أو الرموز في المصفوفة تسمى عناصر المصفوفة (*Elements*) ، وإذا تساوى عدد الصفوف وعدد الاعمدة في مصفوفة ما, وليكن n فإنها تسمى (مصفوفة مربعة من الرتبة n) .
يرمز للمصفوفات بحروف اللغة الانكليزية الكبيرة مثل (....... , A , B , C , D , E) .

مثال 1:-

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ مصفوفة 2×2 وهي مصفوفة مربعة
2. $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4}$ مصفوفة 2×4 وهي مصفوفة مستطيلة
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ مصفوفة2× 3 وهي مصفوفة مستطيلة
4. $D = (4)_{1\times 1}$ مصفوفة من عنصر واحد

5. $E=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}_{3x1}$ مصفوفة 3×1 مكونة من عمود واحد بثلاثة صفو ف

6. $F=(4 \quad 5 \quad 2 \quad -3)_{1X4}$ مصفوفة 1X4مكونة من صف واحد وأربعة أعمدة

[4-2- 2] رتبة المصفوفة (*Order of Matrix*)

هي صيغة تعتمد للتعبير عن عدد صفوف وأعمدة المصفوفة وهذه الصيغة هي ($m \times n$) وتقرأ من اليسار الى اليمين ($m\ by\ n$)حيث تمثلm عدد الصفوف ، n عدد الاعمدة ومن الممكن أن نذكر رتبة المصفوفة بوضعها أسفل القوس المحتوي لعناصرها ومن الممكن أيضاً الاستغناء عن ذلك حسب الحاجه التي تقتضيها طبيعة المسائل التي نستخدمها . فمثلاً :-

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{6}\\\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{0}&-\mathbf{1}\end{pmatrix}_{\mathbf{2\times4}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{6}\\\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{0}&-\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

[4-2- 3] الإشارة الى موقع العنصر في المصفوفة

من المهم جداً أن يتعود الطالب على إستخدام الرموز في التعبير عن المصفوفات أو الاشارة الى موقع عنصر معين داخلها . ولقد تم الأتفاق على إستخدام الرمز a للاشارة الى العنصر ضمن المصفوفة مع ذكر الصف والعمود اللذين ينتمي لهما على التوالي في أسفل الجانب الايمن من الرمز a فمثلاً في المصفوفة A الآتية: $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

الرمز a_{11} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الاول

الرمز a_{12} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الثاني

الرمز a_{21} يشير الى العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الاول

الرمز a_{13} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الثالث .. وهكذا لبقية العناصر ، وبشكل عام فأن أي مصفوفة من الرتبة ($m \times n$) يمكن كتابتها بالصوره $[a_{\text{ij}}]$ حيث :-

$$i=1,2,3,4,\dots,m \qquad j=1,2,3,4,\dots,n$$

أي أن:-

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}=\left[a_{ij}\right], i=1,2,3,\dots,m, j=1,2,3,\dots,n$$

حيث ان المتغيرين $i\ ,j$ في أسفل الرمز a يؤشران موقع العنصر داخل المصفوفة فالمتغير i يمثل الصف الذي يقع فيه العنصر أما المتغير j فإنه يمثل العمود الذي يقع فيه العنصر.

إن هذا الاسلوب في كتابة المصفوفة مفيد جداً في تمثيل المصفوفات ذات الرتب العالية فمثلاً يمكن كتابة مصفوفة من الرتبة (100×500) كما يلي : -

$$A = [a_{\text{ij}}] \ , i = 1,2,3, \dots ,100 \quad , \quad j = 1,2,3, \dots ,500$$

ملاحظة:
في المصفوفة المربعة من الرتبة n يسمى القطر الذي يحتوي العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots \dots , a_{nn}$ بالقطر الرئيسي للمصفوفة .

[4-2- 4] بعض الانواع المهمة من المصفوفات

يوجد عدد من المصفوفات تكتسب أهمية خاصة في التطبيقات الرياضية ومنها ما يلي :-

1) **مصفوفة الصف (*row matrix*) وتدعى أيضاً متجه صف**
وهي مصفوفة من الرتبة $1 \times n$ أي إنها تحتوي صفاً واحداً وعدد من الأعمدة مثل :-

$$A = (2 \quad -5 \quad 3 \quad 1)_{1X4}$$

2) مصفوفة العمود (*column matrix*) وتدعى أيضاً متجه عمود
وهي مصفوفة من الرتبة $m \times 1$ أي أنها تحتوي عموداً واحداً وعدداً من الصفوف مثل :-

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{3X1}$$

3) المصفوفة الصفرية (*zero matrix*)
وهي مصفوفة جميع عناصرها تأخذ قيمة الصفر وهي تمثل العنصر المحايد لعملية الجمع على المصفوفات ذوات الرتب المتساوية مثل :- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$ أو $B = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)_{1\times4}$ أو $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times3}$ **وبعض الاحيان يرمز لها بالرمز O .**

4) المصفوفة القطرية (*diagonal matrix*)
وهي مصفوفة مربعة تأخذ جميع عناصرها قيمة الصفر عدا عناصر القطر الرئيسي $[a_{ii} \ , i = 1, 2, \dots , n]$ فإنها تأخذ قيماً أخرى غير الصفر مثل :-

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

5) مصفوفة الوحدة $(identity\ matrix)$

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تأخذ قيمة الصفر عدا عناصر القطر الرئيسي $[a_{ii}\ , i = 1, 2, \dots, n]$ فإنها تأخذ قيمة (1) فقط وتمثل العنصر المحايد لعملية الضرب على المصفوفات مثل

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$ **(ويرمز لها بالرمز I_2)**

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$ **(ويرمز لها بالرمز I_3)**

6) منقول المصفوفة $(Transpose\ Matrix)$

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $(m \times n)$ فإن المصفوفة ذات الرتبة $(n \times m)$ والتي نحصل عليها من إستبدال صفوف المصفوفة بإعمدتها الواحد بدل الأخر تسمى منقول المصفوفة ويرمز لها A^T

مثال 2:- إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ مصفوفة من الرتبة 2× 3 فإن منقول المصفوفة هو $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

7) المصفوفة المتماثلة $(symmetrical\ matrix)$:- هي المصفوفة المربعة التي فيها :-

$a_{ij} = a_{ji}$ لجميع قيم $i, j = 1, 2, \dots, n$

والمصفوفة متماثلة تحقق العلاقة $A = A^T$

مثال 3:- المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ متماثلة لأن $A = A^T$

[3-4] تساوي مصفوفتين

تتساوى المصفوفتان A, B إذا وفقط أذا تحقق الشرطان الآتيان:-

1)تساوي رتبتي المصفوفتين

2) تساوي العناصر التي لها نفس الموقع في المصفوفة $a_{ij} = a_{ji}$ لجميع قيم $i, j = 1,2, \dots, n$

مثال 4:- المصفوفتان A, B في أدناه متساويتان لتحقق الشرطين الواردين في التعريف ألسابق .

$$A = \begin{pmatrix} 3+2 & 2 & -1\times 3 \\ 1 & -2+2 & 0.7 \\ 2 & 2-6 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 5:- إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 2 & 3x+1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفتين متساويتين

جد قيمة x .

الحل:- $7 = 3x + 1 \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

مثال 6:- جد قيم x , y حيث $x , y \in \mathbb{R}$ لكل مما يلي :-

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ y+7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3x+2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ \begin{pmatrix} x+4 & 5 \\ 2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y & 5 \\ 2 & 3x \end{pmatrix}$$

الحل:- بما إن المصفوفتين متساويتان لذلك تتساوى العناصر التي تحتل الموقع ذاته فيهما وعليه يكون:-

$$1)\ \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ y+7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3x+2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5 = 3x + 2 \quad \Rightarrow 3 = 3x \quad \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

$$y + 7 = 5 \quad \Rightarrow y = 5 - 7 \quad \Rightarrow y = -2$$

$$2)\ )\ \begin{pmatrix} x+4 & 5 \\ 2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y & 5 \\ 2 & 3x \end{pmatrix}$$

$$x + 4 = 5y \quad \Rightarrow x - 5y = -4 \qquad \dots(1)$$

$$y + 2 = 3x \quad \Rightarrow 3x - y = 2 \qquad \dots(2)$$

وبضرب المعادلة(2) بالعدد(−5) نحصل على :-

$$x - 5y = -4 \qquad \dots(1)$$

$$-15x + 5y = -10 \qquad \dots(2)$$ بالجمع

$$-14x = -14 \quad \Rightarrow x = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$\therefore 1 - 5y = -4 \quad \Rightarrow -5y = -5 \quad \Rightarrow y = 1$$

تمارين(4-1)

1. حدد رتبة كل من المصفوفات الآتية:-

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}\ ,\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\ ,D=\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$$

2. جد منقول كل من المصفو فات الوارده في السؤال الاول اعلاه .
3. أعط أمثلة لما يلي :-
   a) مصفوفة قطرية
   b) مصفوفة صفرية من الرتبة 3×4
   c) مصفوفة متماثلة من الرتبة 3×3
4. أوجد قيمة x إذا كانت :- $\begin{pmatrix}x-5 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$
5. بين أي من المصفوفات الآتية متماثلة :-

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}\ ,\quad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\ ,D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\\ 5 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

[4-4] جبر المصفوفات

[4-4-1] جمع وطرح المصفوفات

تجمع (أو تطرح) المصفوفات إذا كانت من نفس الرتبة وتكون عملية الجمع (أو الطرح) بجمع (أو بطرح) العناصر ذات المواقع المتناظرة بين المصفوفتين .

مثال 7:- إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 10\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & 3\\ 2 & -2 & 15\end{pmatrix}$$

لاحظ إن المصفوفة C الناتجة من عملية الجمع لها نفس رتبة المصفوفتين A،B

$$D=A-B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -5 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\ 2 & -8 & 5\end{pmatrix}$$

لاحظ إن المصفوفة D الناتجة من عملية الطرح لها نفس رتبة المصفوفتين A،B

(4-4-2)   خواص جمع المصفوفات

1) عمليتي الجمع والطرح غير معرفتين بين المصفوفات المختلفة في الرتب .
2) خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع :- مجموع أي مصفوفة مع المصفوفة الصفرية المساوية لها بالرتبة تساوي المصفوفة ذاتها .
3) خاصية النظير الجمعي : أذا كانت $\boldsymbol{A}$ مصفوفة ما فإن ($\boldsymbol{-A}$)تسمى النظير الجمعي للمصفوفة $\boldsymbol{A}$ بحيث $\boldsymbol{A+(-A)=O}$ حيث $\boldsymbol{O}$ هي المصفوفة الصفرية التي لها نفس رتبة المصفوفة $\boldsymbol{A}$.
4) خاصية الابدال $\boldsymbol{A+B=B+A}$
5) خاصية التجميع :- أذا كانت $\boldsymbol{A،B،C}$ ثلاث مصفوفات متساوية في الرتبة فأن $\boldsymbol{(A+B)+C=A+(B+C)}$
6) إذا كانت $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ مصفوفتين من نفس الرتبة فإن $\boldsymbol{(A+B)^T=A^T+B^T}$

مثال 8: **تحقق من صحة الخواص 2،3،4،5،6 بإستخدام المصفوفات الآتية :-**

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}\ ,B=\begin{pmatrix}0&5\\6&4\end{pmatrix}\ ,\quad C=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix},O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}$$

الحل :-

1) خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع

$$A+O=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}=A$$

2) خاصية النظير الجمعي

$$A+(-A)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

3) خاصية الأبدال

$$A+B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&5\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\8&2\end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix}0&5\\6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\8&2\end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=B+A$$

4) خاصية التجميع

$$(A+B)+C=\left(\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&5\\6&4\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\8&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\11&4\end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}0&5\\6&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&9\\9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\11&4\end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

5) منقول مجموع مصفوفتين يساوي مجموع منقول كل منهما

$$(A+B)^T = [\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 5\\ 6 & 4\end{pmatrix}]^T = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 6\\ 5 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 8\\ 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

تمارين(4-2)

1. إذا كانت $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{6} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{5}\\ \mathbf{4} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

أوجد المصفوفات الآتية (إذا كانت العملية المطلوب إجراؤها معرّفة)

a) $\boldsymbol{A+B}$
b) $\boldsymbol{A-B}$
c) $\boldsymbol{A+C}$
d) $\boldsymbol{C-A}$
e) $\boldsymbol{(B-A)^T}$
f) $\boldsymbol{A^T+B^T}$

2. مستخدماً المصفوفات الوارده في السؤال الاول أثبت إن :-

$$\boldsymbol{(A+B)^T = A^T + B^T}$$

[4-4-3] ضرب المصفوفات بعدد ثابت

يمكن ضرب أي مصفوفة مهما كانت رتبتها بعدد ثابت ويسمى هذا النوع من الضرب بالضرب القياسي ($Scalar\ Multiplication$) ويتم ذلك عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد المراد ضرب المصفوفة به.

مثال 9: (a) لتكن $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ فإن $-3A$ مصفوفة لها نفس رتبة A ونحصل عليها كما يأتي:

$$-3A = (-3).\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 6 & -3 \times 2 \\ -3 \times (-4) & -3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 12 & -21 \end{pmatrix}$$

(b) لتكن $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ فإن $2B$ مصفوفة لها نفس رتبة B ونحصل عليها كما يأتي :

$$2B = (2) \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 2 & 2 \times (-1) \\ 2 \times 0 & 2 \times 1 & 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

(4-4-4) ضرب المصفوفات ببعضها

نستطيع ضرب مصفوفتين B ، إذا كان عدد الأعمدة في احدى المصفوفتين مساوٍ لعدد الصفوف في المصفوفة الأخرى ، وبشكل خاص فإن حاصل ضرب المصفوفتين A،B يكون معرفاً إذا كانت عدد أعمدة المصفوفة A مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة B . فمثلاً إذا كانت A_{2x4} و B_{4x3} فإن حاصل ضربهما $A \,.\, B$ مصفوفة رتبتها 2x3 .

ملاحظة(1) :- تكون رتبة المصفوفة A.B الناتجة من عملية ضرب المصفوفتين $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ هي $m \times n$

ملاحظة (2): إذا كان عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A فإن المصفوفة الناتجة من عملية الضرب $B.A$ تكون غير معرّفة

مثال 10: المصفوفة A ذات الرتبة 2×3 والمصفوفة B ذات الرتبة 5×2 معرفة بينهما عملية الضرب A.B لأن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B وهو 2 وعليه تكون رتبة المصفوفة الناتجة مساوية لعدد اعمدة B مضروبة بعدد صفوف A أي (3×5).

ولتوضيح فكرة ضرب المصفوفات نقول إن العنصر الموجود في الصف m والعمود n من مصفوفة حاصل الضرب هو العدد الناتج من جمع حواصل ضرب عناصر الصف m في المصفوفة الاولى بعناصر العمود n في المصفوفة الثانية . وتسهيلاً لهذه الفكرة فإننا سنتدرج في هذا المفهوم فنبدأ أولاً بعملية ضرب صف بعمود.

[4-4-4-1] ضرب صف بعمود

عند إجراء عملية ضرب بين صف مثل A_{1xn} وعمود B_{nx1} فأن حاصل الضرب هو مصفوفة ذات عنصر وحيد حيث تكون رتبة المصفوفة الناتجه هي 1x1 ونحصل على هذا العنصر بجمع حاصل ضرب عناصر الصف للمصفوفة A بعناصر العمود للمصفوفة B بشكل متناظر وكما موضح في المثال الآتي :-

مثال 11: $\boldsymbol{A = (1 \quad 2 \quad 3)_{1\times 3}}$ ، $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1}}$

$$A.B = (1 \quad 2 \quad 3).\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = [(1\times 2) + (2\times 0) + (3\times 4)] = (2+0+12) = 14$$

أما عند إجراء عملية ضرب بين العمود $B_{\mathrm{n}\times 1}$ والصف $A_{1\times \mathrm{n}}$ وفأن حاصل الضرب هو مصفوفة من الرتبة $(n\times n)$ ونحصل على هذه المصفوفة بضرب عناصر العمود للمصفوفة B بعناصر الصف للمصفوفة A بشكل متناظر وكما موضح أدناه :-

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{3\times 1} .(1 \quad 2 \quad 3)_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

مثال 12: **المصفوفة** $\boldsymbol{A = (3 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 0)_{1X6}}$ **والمصفوفة** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{6\times 1}}$

$$(A.B)_{1\times 1} = [(3\times 3) + (0\times 1) + (2\times 3) + (0\times 1) + (4\times 5) + (0\times 1)]$$

$$= (9+0+6+0+20+0) = 35$$

[4-4-4-2] ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى

نحصل على عناصر حاصل ضرب مصفوفتين متوافقتين لعملية الضرب (أي عدد أعمدة المصفوفة الاولى مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة الثانيه) وفقاً للخطوات الآتية

$$C = A.B = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. C_{11} =حاصل جمع (عناصر الصف الاول من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الاول المقابلة لهامن المصفوفة الثانية)
2. C_{12} =حاصل جمع (عناصر الصف الاول من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثاني المقابلة لها من المصفوفة الثانية)
3. C_{13} =حاصل جمع (عناصر الصف الاول من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثالث المقابلة لها من المصفوفة الثانية) ...... وهكذا لبقية الاعمدة

ثم :-

1. C_{21} =حاصل جمع (عناصر الصف الثاني من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الاول المقابلة لها من المصفوفة الثانية)
2. C_{22} =حاصل جمع (عناصر الصف الثاني من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثاني المقابلة لها من المصفوفة الثانية)
3. C_{23} =حاصل جمع (عناصر الصف الثاني من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثالث المقابلة لها من المصفوفة الثانية) ...... وهكذا لبقية الاعمدة

ثم :-

1. C_{31} =حاصل جمع (عناصر الصف الثالث من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الاول المقابلة لها من المصفوفة الثانية)
2. C_{32} =حاصل جمع (عناصر الصف الثالث من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثاني المقابلة له h من المصفوفة الثانية)
3. C_{33} =حاصل جمع (عناصر الصف الثالث من المصفوفة الاولى × عناصر العمود الثالث المقابلة لها من المصفوفة الثانية) ...... وهكذا لبقية الاعمدة

مثال 13: المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}_{2\times3}$ والمصفوفة $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times1}$ تكون عملية ضربهما كما يلي :

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times(-1) + 1\times5 + 0\times1 \\ 3\times(-1) + (-1)\times5 + 4\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_{2X1}$$

ولكن $\boldsymbol{A}$. غير معرّف لكون عدد أعمدة المصفوفة $\boldsymbol{B}$ لا يساوي عدد صفوف المصفوفة $\boldsymbol{A}$

مثال 14: إذا كانت $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2}$، $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$ جد $(B.A)$ ،$(A.B)$

$$(A.B) = \begin{pmatrix} 1\times(-1) + (-1)\times0 & 1\times3 + (-1)\times5 \\ 2\times(-1) + 0\times0 & 2\times3 + 0\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} -1\times1 + 3\times2 & -1\times(-1) + 3\times0 \\ 0\times1 + 5\times2 & 0\times(-1) + 5\times0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

نلاحظ إن $A.B \neq B.A$

مثال 15: إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ فأن :-

$$(A.B) = \begin{pmatrix} 1\times5 + 3\times9 \\ 2\times5 + 8\times9 \\ 4\times5 + 0\times9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

ونلاحظ إن $\boldsymbol{B.A}$ غير معرّف لعدم توافر شروط الضرب فيه .

تمارين(3-4)

1. اذا كانت $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 12 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

أحسب ما يلي :-

a) $A - 2B + C$

b) $-2C + 3A$

c) $B - A + 3C$

d) $3(A + B)$

e) $5.A^T + (-2B)^T$

2. اذا كانت $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **إحسب إن أمكن :-**

a) $A.B$

b) $B.A$

3. إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **إحسب إن أمكن :-**

a) $A.B$

b) $B.A$

4.جد قيمة كل من Y, Z, W **, في المصفوفات المتساوية الآتية :-**

a) $\begin{pmatrix} 2X+3 & 3Y-6 \\ X-1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ Z & 2W-6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3X & 10 \\ 2X+Z & 2Y-W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2Y \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

5. إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **أثبـت أن:-**

$$(A - B) = -(B - A)$$

6. إذا كانت $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

جد المصفوفات الآتية (إن كانت العملية معرّفة) .

a) $(A.B)$

b) $(B.A)$

c) $(A.C)$

d) $(C.A)$

e) $(B.C)$

f) A^2

g) B^2

h) C^2

i) $(A.B)^T$

j) $A^T.B^T$

k) $B^T.A^T$

l) $(A+B)^T$

[4-5] المحددات (*Determinanths*)

سنعالج في هذا البند المحددات وبعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بها وتطبيقاتها في حل نظام المعادلات الخطية بإستعمال طريقة كرايمر (*Gramer's method*)

تعريف المحددة
كل مصفوفة مربعة مثل A تقترن بعدد وحيد يسمى محدد المصفوفة ويكتب $\det(A)$ وفي بعض الاحيان $|A|$ (وقد أستخدم زوج من الخطوط العمودية تمييزاً لها عن المصفوفة ولا يقصد به القيمة المطلقة).

[4-5-1] حساب قيمة المحددة المربعة (2×2)

إذا كانت المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية (اي 2×2) ولتكن مثلاً $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

فأن محدد المصفوفة A من الرتبة (2×2) يعرف بالشكل الآتي :-

$$\mathbf{\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c}$$

مثال 16: جد محدد المصفوفة $_{2\times2}$ $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$

الحل :-

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-1) \times 3 = 2 + 3 = 5$$

مثال 17: جد محدد المصفوفة $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}_{2\times2}}$

الحل :-

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -3 & 15 \end{vmatrix} = [(-2) \times 15 - 8 \times (-3)] = -30 + 24 = -6$$

[4-5-2] حساب قيمة المحددةالمربعة (3×3)

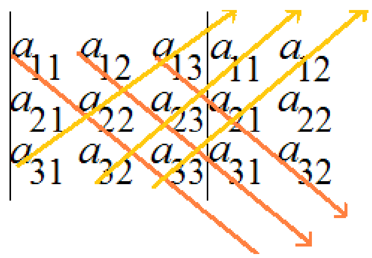
الطريقة الاولى (طريقة الاسهم) :-

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، يمكن إحتساب محدد المصفوفة A كما يلي :-

1) أكتب العمودين الاول والثاني خارج المحدد وكما مبين أدناه :-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2) مرر أسهم بعناصر المحدد كما يلي :-



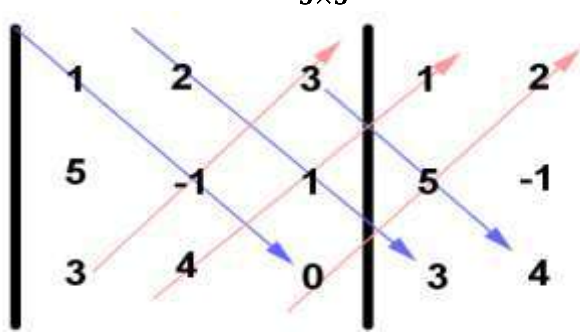
3) جد حاصل ضرب العناصر الثلاثة التي تقع على كل سهم

و نحصل على $\det(A)$ من العلاقة الآتية :-

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة:- تستخدم هذه الطريقة فقط للمصفوفات المربعة من الرتبة 3×3

مثال 18: **جد محدد المصفوفة** $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$



$$\det(W) = [\,1 \times (-1) \times 0 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 5 \times 4] - [3 \times (-1) \times 3 + 4 \times 1 \times 1 + 0 \times 5 \times 2]$$

$$= [0 + 6 + 60] - [-9 + 4 + 0] = 66 + 5 = 71$$

الطريقة الثانية (طريقة التجزئة)

وفي هذه الطريقة يتم تجزئة المحددة المربعة (3×3) الى ثلاثة محددات صغيرة من الرتبة (2×2) عن طريق أختيار a_{11} وحذف صفه وعموده ثم أختيار a_{12} وحذف صفه وعموده ثم أختيار a_{13} وحذف صفه وعموده يلي ذلك تبسيط النتائج بالاستفاده من تعريف محدد المصفوفة من الرتبة (2×2) وعلى النحو الآتي :-

$$\begin{array}{c} \quad + \qquad - \qquad + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,M_{11} - a_{12}\,M_{12} + a_{13}\,M_{13}$$

حيث تمثل M_{11} المحددة للعناصر المتبقية من حذف الصف الاول والعمود الاول من المحددة الاصلية

و تمثل M_{12} المحددة للعناصر المتبقية من حذف الصف الاول والعمود الثاني من المحددة الاصلية

و تمثل M_{13} المحددة للعناصر المتبقية من حذف **الصف الاول والعمود الثالث من المحددة الاصلية**

مثال 19: **أحسب قيمة محددة المصفوفة الآتية:-** $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}_{3\times3}$

الحل:-

$$det(Z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-6) - 2(3-4) + 3(9-2)$$

$$= -5 + 2 + 21 = 18$$

[3-5-4] بعض خواص المحددات

1) إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف في المحددة تساوي صفراً فإن قيمة المحدد تساوي صفراً

مثال 20:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} \end{vmatrix} = \mathbf{1}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} \end{vmatrix} - (\mathbf{-3})\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{vmatrix} + \mathbf{4}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-5} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{1(0-0) + 3(0-0) + 4(0-0) = 0}$$

2) محددة أي مصفوفة مربعة تساوي محددة المصفوفة المنقولة لها أي:- $\mathbf{det}(A) = \mathbf{det}(A^T)$

مثال 21: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ فإن $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ ويكون :-

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times 0) = 2 - 0 = 2$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times 0) = 2 - 0 = 2$$

3) إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف واحد فقط أو عمود واحد فقط للمحددة بعدد حقيقي فإن قيمة المحددة الناتجة يساوي حاصل ضرب ذلك العدد بالمحددة الاصلية .

مثال 22: إذا كانت $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ فإن $\mathrm{de}(A) = (1 \times 3) - (2 \times 1) = 1$

لو ضربنا الصف الاول بالعدد 5 فإن المحددة ستكون بالشكل $B = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det\ B = (5 \times 3) - (10 \times 1) = 15 - 10 = 5 = 5\det(A)$$

كما إننا لو ضربنا العمود الثاني مثلاً بالعدد (-2) فإن المحددة ستكون بالشكل $C = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$

ويكون:-

$$\det C = [1 \times (-6)] - [(-4) \times 1] = -6 + 4 = -2 = -2\det(A)$$

4) إذا تبادل صفان أو عمودان لمواقعهما في المحددة فأن إشارة المحددة فقط هي التي سوف تتغير وتبقى القيمة نفسها .

مثال 23: إذا كانت $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ فإن $\mathrm{de}(A) = (2 \times 6) - (5 \times 1) = 7$

لو إستبدلنا الصف الاول بالصف الثاني فأن المحددة ستكون بالشكل $B = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det\ B = (1 \times 5) - (2 \times 6) = 5 - 12 = -7$$

ولو إستبدلنا العمود الاول بالعمود الثاني فأن المحددة ستكون بالشكل $C = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det\ C = (5 \times 1) - (2 \times 6) = 5 - 12 = -7$$

5) إذا تماثل صفان أو عمودان في محددة فإن قيمة المحددة تساوي صفراً .

مثال 24: جد قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **الحل:-**

$$1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-3) - 1(0-3) + 2(0-0) = -3 + 3 + 0 = 0$$

وبالإمكان الاستغناء عن هذه الخطوات بملاحظة كون العمودين الاول والثاني متماثلين والاجابة بان قيمة المحددة تساوي صفر مباشرة .

[4-6] حل المعادلات الخطية بإستعمال المحددات

في هذا البند سوف نتطرق الى حل معادلتين خطيتين بمتغيرين بإستخدام المحددات وكذلك حل نظام خطي مؤلف من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات بإستخدام المحددات وطريقة كرايمر (*Gramer's method*) .

[4-6-1] حل معادلتين خطيتين بمتغيرين بإستخدام المحددات

لحل المعادلتين الخطيتين بالمتغيرين y ، x وليكونا :-

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

وبصيغة المصفوفة :-

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ A & X = & B \end{array}$$

عندما $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

نتبع الخطوات الآتية:-

1. نستخرج $\det(A)$ أي محددة معاملات المتغيرين y ، x وكما يلي :-

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

وفي حالة كون قيمة $\det(A)$ تساوي صفراً فإنه ليس للمعادلتين حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أي إن مجموعة الحل تكون مجموعةً خالية .

2. نستخرج $\det(A_x)$ وهي المحددة A ذاتها لكن بعد إستبدال عمودها الاول بعمود المصفوفة B في الطرف الايمن وكما يلي :-

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1\, a_{22} - a_{12}b_2$$

3. نستخرج $\det(A_y)$وهي المحددة A ذاتها لكن بعد إستبدال عمودها الثاني بعمود المصفوفة B في الطرف الايمن وكما يلي :-

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}\, b_2 - b_1\, a_{21}$$

4. نستخدم طريقة كرايمر لأيجاد قيم المتغيرين x, y في المعادلتين وكما يلي :-

$$\boxed{x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}} \quad ، \quad \boxed{y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}}$$

مثال 25: حل المعادلتين الآتيتين بطريقة المحددات (طريقة كرايمر) :

$$-2x + y = 5$$
$$3x - 4y = -25$$

الحل :-

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad ، \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; ، \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-4)] - (1 \times 3) = 8 - 3 = 5$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = [5 \times (-4)] - [1 \times (-25)] = -20 + 25 = 5$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-25)] - (5 \times 3) = 50 - 15 = 35$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{35}{5} = 7$$

$$S.s = \{(1,7)\}$$

مثال 26: حل المعادلتين الآتيتين بطريقة المحددات (طريقة كرايمر) :

$$-2x + y = 5$$
$$x - 0.5y = -2.5$$

الحل:-

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix} ، \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; ، \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-0.5)] - (1 \times 1) = 1 - 1 = 0$$

وحيث إن $\det(A) = 0$ فإن $S.s = \phi$ أي إنه ليس للمعادلتين حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

[4-6-2] حل نظام خطي مؤلف من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات بإستعمال المحددات

نستخدم الاسلوب ذاته الذي أستخدمناه لحل المعادلتين الخطيتين بمتغيرين وكما يلي :-

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0 \,, \det(A_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ ، } \det(A_z) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}} \text{ ، } \boxed{y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}} \text{ ، } \boxed{z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}}$$

مثال 27: حل النظام الخطي المؤلف من المعادلات الثلاثة الآتية بطريقة المحددات(طريقة كرايمر)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x-2y+3z} &= \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-2x+\ y-5z} &= \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3x+3y+4z} &= \boldsymbol{2} \end{aligned}$$

الحل:-

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \qquad\qquad X \ = \ \ B$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= 1(4+15) + 2(-8+15) + 3(-6-3) = 19 + 14 - 27 = 6$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= -1(4+15) + 2(4+10) + 3(3-2) = -19 + 28 + 3 = 12$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \ 1(4+10) + 1(-8+15) + 3(-4-3) = \ 14 + 7 - 21 = 0$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \ 1(2-3) + 2(-4-3) - 1(-6-3) = -1 - 14 + 9 = -6$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{12}{6} = 2 \ ، \ y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{6} = 0 \ ، \ z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\therefore S.s = \{(2,0,-1,)\}$$

تمارين(4-4)

1. إحسب قيمة المحددات الآتية:-

$$a)\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 5\end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 11 & 6\end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix}6 & 5\\ 0 & 6\end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix}2 & 5 & 2\\ 3 & 6 & 6\\ 4 & 8 & 1\end{vmatrix}$$

$$e)\begin{vmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

2. جد قيمة x التي تحقق ما يلي :-

$$a)\begin{vmatrix}2x & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix}3-x & 0 & 1\\ 1 & 4-x & 1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix} = 2$$

3. جد مجموعة حل كل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية بإستخدام المحددات (طريقة كرايمر)

$a)$
$2x + 3y = 4$
$x - y = -3$

b)
$3x + 2y = 12$
$5x - 3y = 1$

c)
$2x + 8y = 4$
$x + 4y = 14$

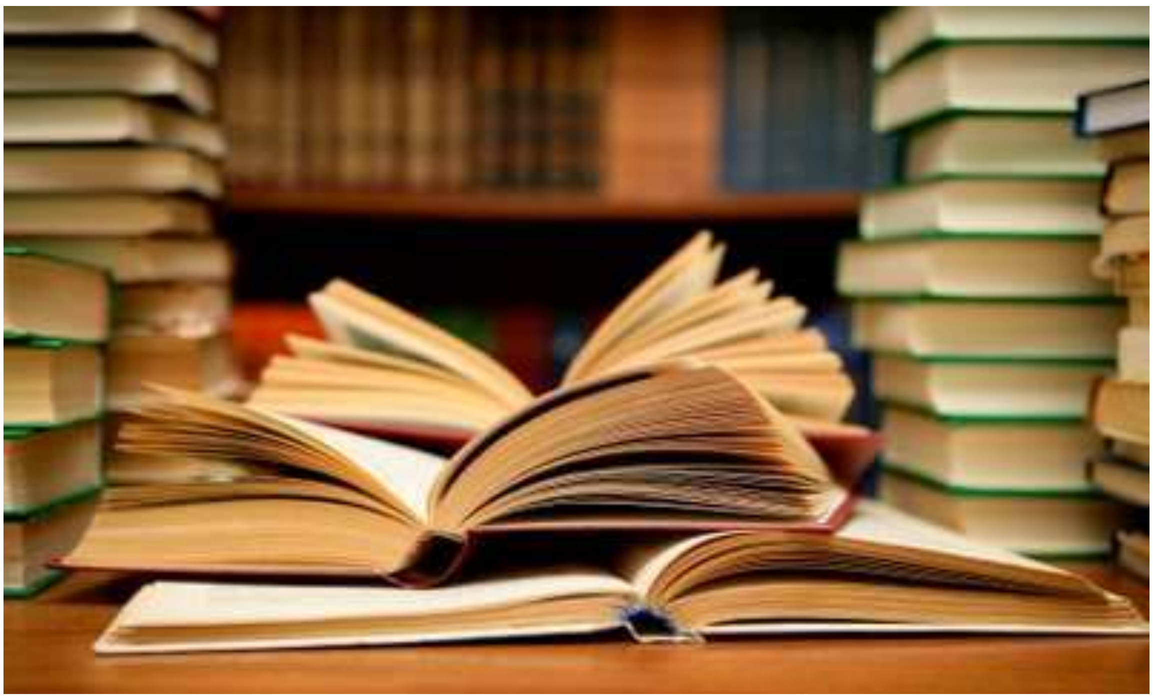
d)
$x + y + z = 6$
$2x + 3y + z = 11$
$3x + 2y + z = 13$

(e)
$x + y + z = 6$
$2x + 3y + z = 11$
$-x - 2y = -5$

الفصل الخامس

علم الاحصاء

مقاييس النزعة المركزي



الفصل الخامس

علم الاحصاء

مقاييس النزعة المركزية

الأهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1. يتعرف على أنواع الجداول ويتمكن من أنشائها .
2. يفهم ماهية جداول التوزيع التكراري والغاية من أنشائها .
3. يلم بوسائل التمثيل البياني لعرض البيانات الأحصائية .
4. يتعرف على مفهوم المدى ويتمكن من استخراجه.
5. يتعرف على مفهوم الأنحراف المتوسط ويتمكن من استخراجه.
6. يتعرف على مفهوم التباين ويتمكن من استخراجه.
7. يتعرف على مفهوم الأنحراف المعياري ويتمكن من استخراجه.
8. يتعرف على مفهوم الخطأ المعياري ويتمكن من استخراجه
9. يتعرف على مفهوم معامل الإختلاف ويتمكن من استخراجه

الفصل الخامس
علم الاحصاء
مقاييس النزعة المركزية

(5-1) أنواع الجداول.

(5-2) جداول التوزيع التكراري.

(5-3) التمثيل البياني.

(5-3-1) العرض البياني في حالة المتغير الكمي

(5-3-2) العرض البياني في حالة المتغير النوعي

(5-4) التشتت أو الاختلاف.

(5-4-1) مقاييس التشتت المطلق .

(5-4-1-1) المدى .

(5-4-1- 2) الإنحراف المتوسط .

(5-4-1- 3) التباين .

(5-4-1-4) الإنحراف المعياري .

(5-4-1-5) الخطأ المعياري (الخطأ القياسي) .

(5-4-2) مقاييس التشتت النسبي .

(5-4-2-1) معامل الإختلاف

(5-1) أنواع الجداول

بعد جمع البيانات الأحصائية الأولية (*Raw data*) لدراسة ظاهرة معينة وفق الأساليب والطرق التي ذكرناها سابقا فانه غالبا لا يمكن الاستفادة منها وهي على الصورة هذه، لذا فغالبا ما توضع في جداول مبسطة أو يعبر عنها بصورة اشكال ورسوم بيانية لتسهيل عملية دراستها وتحليلها.

العرض الجدولي (*Tabular Presentation*)

هناك نوعان رئيسيان من الجداول الأحصائية وهما:

1-الجدول البسيط 2-الجدول المركب

1-الجدول البسيط:

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفة واحدة ويتألف من عمودين. الأول يمثل تقسيمات الصفة أو الظاهرة الى فئات أو مجموعات والثاني يبين عدد المفردات التابعة لكل فئة أو مجموعة. الجدول(5-1-1) , (5-1-2) يمثل نموذجاً للجدول البسيط.

جدول (5 -1-1) جدول توزيع الدرجات الفصلية لمادة الأحصاء للصف الأول الزراعي.

فئات الدرجات	عدد الطلبة
31-40	2
41-50	4
51-60	7
61-70	12
71-80	18
81-90	6
91-100	1

جدول (2-1-5) جدول توزيع عدد الطلبة للمرحلة الأولى في كلية الزراعة حسب الأقسام العلمية

القسم العلمي	عدد الطلبة
علوم التربة	70
علوم المحاصيل	50
وقاية المزروعات	60
البستنة	50
الصناعات الغذائية	30
الارشاد الزراعي	25
الاقتصاد الزراعي	20
المكننة الزراعية	35

2-الجدول المركب:

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات وفق صفتين أو ظاهرتين أو اكثر في الوقت نفسه. فتكون الفئات أو المجاميع للصفة أو الظاهرة الأولى تمثل الصفوف والصفة أو الظاهرة الثانية تمثل الاعمدة ، بينما تمثل الخلايا (المربعات) الداخلية أعداد المفردات للصفات أو التكررات هذه والجدول(3-1-5)يمثل نموذج للجدول المركب المتكون من صفتين.

جدول(3-1-5) جدول توزيع عدد الطلبة في كلية الزراعة حسب المراحل الدراسية والاقسام العلمية

القسم العلمي	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة	المرحلة الرابعة
علوم التربة	70	45	34	36
علوم المحاصيل	50	40	37	46
وقاية المزروعات	60	55	45	48
البستنة	50	56	44	36
الصناعات الغذائية	30	25	28	32
الارشاد الزراعي	25	18	20	24
الاقتصاد الزراعي	20	25	18	19
المكننة الزراعية	35	18	17	12

والان سنشرح بالتفصيل كيفية أنشاء أو تكوين جدول من الجداول البسيطة الكثيرة والشائعة الاستعمال ويدعى بجدول التوزيع التكراري.

(5-2) جداول التوزيع التكراري(*Frequency Table*)

تنظم وتلخص البيانات الأحصائية سواء كانت وصفية أم كمية فيما يسمى بالتوزيع التكراري (*Frequency Distribution*) وهو عبارة عن جدول يلخص البيانات الخام فيوزعها على فئات ويحدد عدد الأفراد الذين ينتمون الى كل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة ويرمز له بالرمز f ، ولأتمام ذلك ينبغي ان يصمم جدولاً آخر يسمى بجدول تفريغ البيانات الأحصائية. وهو يتكون من ثلاثة اعمدة. العمود الأول يكتب فيه الصفة للبيانات الوصفية أو الفئة للبيانات الكمية ، وفي العمود الثاني توضع العلامات وهي عبارة عن حزم مكونة من خمسة خطوط ، أربعة منها رأسية والخامس مائل يربط الخطوط الأربعة الرأسية وبذلك تصبح الحزمة على الصورة (~~||||~~) وفي العمود الثالث يكتب مجموع العلامات أمام كل صفة أو فئة ومجموع العلامات هذه في كل فئة يسمى التكرار لهذه الصفة أو الفئة.

هناك أنواع متعددة من جداول التوزيع التكراري أهمها:

1- جدول التوزيع التكراري البسيط
2- جدول التوزيع التكراري النسبي
3- جدول التوزيع التكراري المتجمع
   a) جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد
   b) جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

1- جدول التوزيع التكراري البسيط (*Simple Frequency table*)

تعريف جدول التوزيع التكراري البسيط

هو جدول بسيط يتكون من عمودين :
الاول : تقسم فيه قيم المتغير على اقسام أو مجموعات تسمى الفئات(*Classes*)
الثاني : يبين مفردات كل فئة ويسمى بالتكرار (*Frequency*)

بعض التعاريف المهمة

البيانات غير المبوبة *(Ungrouped Data)*

وهي البيانات الخام الأولية أو الاصلية (*Raw data*)التي جمعت ولم تبوب.

البيانات المبوبة *(Grouped Data)*

وهي البيانات التي تم تبويبها وتنظيمها في جدول التوزيع التكراري.

الفئات (*Classes*)

وهي الفترة التي نختارها لتقسيم بيانات المتغير على مجموعات متساوية بحيث تكون لكل قسم أو صنف صفة مميزة.

حدود الفئات (*Class Limit*)

لكل فئة حدان، حد أدنى وحد أعلى.

طول الفئة (*Class Length*)

وهو مقدار المدى بين حدي الفئة.

مركز الفئة(*Class Midpoint*)

منتصف المدى بين حدي الفئة.

تكرار الفئة *(Class Frequency*)

وهي عدد المفردات أو القيم التي تقع تحت مدى تلك الفئة ويرمز لها بالرمز f_i

خطوات تكوين جدول التوزيع التكراري البسيط :

a. في حالة البيانات الوصفية

(1) أنشاء جدول تفريغ البيانات الذي يتكون من ثلاثة أعمدة، الأول يتضمن الصفة للبيانات الوصفية والثاني للعلامات والثالث للتكرار لكل صفة.
(2) انشاء جدول التوزيع التكراري البسيط الذي يتضمن عمودين، الأول للصفات الوصفية والثاني لتكرار الفئات.

مثال1: إذا كانت لدينا بيانات أنواع 40 شجرة من الحمضيات في أحد البساتين

لالنكي	ليمون	برتقال	نارنج	برتقال
ليمون	نارنج	ليمون	لالنكي	نارنج
ليمون	لالنكي	ليمون	برتقال	برتقال
برتقال	نارنج	برتقال	ليمون	برتقال
لالنكي	نارنج	ليمون	برتقال	ليمون

ؤ أولا: نعمل جدول تفريغ البيانات كالآتي: -

جدول (1-2-5) جدول تفريغ البيانات لأشجار الحمضيات

أنواع أشجار الحمضيات	العلامات	التكرار
نارنج	$\cancel{||||}$ $|$	6
برتقال	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	15
ليمون	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $|$	11
لالنكي	$\cancel{||||}$ $|||$	8

ثانيا: جدول التوزيع التكراري لأشجار الحمضيات

جدول(2-2-5) التوزيع التكراري لأشجار الحمضيات

أنواع أشجار الحمضيات	التكرار
نارنج	6
برتقال	15
ليمون	11
لالنكي	8

b. في حالة البيانات الكمية

(1) ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا

(2) حساب قيمة المدى حيث ان :-   قيمة المدى = أعلى قيمة – أدنى قيمة

(3) أختيار عدد مناسب للفئات:

هناك عدة طرق حسابية تقريبية لأيجاد عدد الفئات سنذكرها للعلم فقط أهمها:

طريقة سترجس Sturges: عدد الفئات= 1 + (3.3 + لوغارتم عدد المفردات)

طريقة يول Yule: عدد الفئات = 2.5 x الجذر الرابع لعدد المفردات

ولكل من الطريقتين ميزات وعيوب ولن نستعمل أياً منها في الوقت الحاضر بل سنختار الفئات أختياراً ويفضل ان يكون العدد بين خمس الى خمس عشرة فئة.

(4) حساب طول الفئة: -

طول الفئة = المدى / عدد الفئات   ويفضل تقريبها الى أقرب عدد صحيح

(5) حساب مركز الفئة :

(6)

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{بداية الفئة} + \text{نهاية الفئة}}{2}$$

مثال2: البيانات الآتية تمثل درجات 40 طالبا في مادة الرياضيات

84	36	87	42	55	45	72	65
91	62	76	88	28	79	66	58
61	64	56	93	83	67	78	29
80	73	84	71	33	63	74	46
50	51	58	64	74	94	85	25

الحل: ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا

25	28	29	33	36	42	45	46
50	51	55	56	58	58	61	62
63	64	64	65	66	67	71	72
73	74	74	76	78	79	80	83
84	84	85	87	88	91	93	94

المدى : $69 = 25 - 94$

عدد الفئات : 7 (أختياري)

طول الفئة : $9.86 = \frac{69}{7}$ تقرب الى أقرب عدد صحيح وهو (10)

جدول(3-2-5) جدول تفريغ البيانات لدرجات مادة الرياضيات

<table>
<tr><th>الفئات</th><th>مركز الفئات</th><th>العلامات</th><th>التكرار</th></tr>
<tr><td>$25 - 34$</td><td>29.5</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$35 - 44$</td><td>39.5</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$45 - 54$</td><td>49.5</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$55 - 64$</td><td>59.5</td><td>$\cancel{||||}$ ||||</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$65 - 74$</td><td>69.5</td><td>$\cancel{||||}$ |||</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$75 - 84$</td><td>79.5</td><td>$\cancel{||||}$ ||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$85 - 94$</td><td>89.5</td><td>$\cancel{||||}$ |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>المجموع</td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

جدول(4-2-5) التوزيع التكراري البسيط لدرجات مادة الرياضيات

التكرار	الفئات
4	25 - 34
2	35 - 44
4	45 - 54
9	55 - 64
8	65 - 74
7	75 - 84
6	85 - 94
40	المجموع

2-جدول التوزيع التكراري النسبي(***Relative Frequency Distribution*** **)**

وهو جدول يبين الأهمية النسبية لكل فئة. ويحسب التكرار النسبي لكل فئة بالطريقة الآتية:

$$\text{التكرار النسبي لأي فئة} = \frac{\text{تكرار تلك الفئة}}{\text{المجموع الكلي للتكرارات}} = \frac{f_i}{\sum f_i}$$

وعادة يوضع التكرار النسبي كنسبة مئوية وذلك بضرب كل تكرار نسبي بالعدد 100 وكما مبين في الجدول (5-2-5) الآتي:-

جدول (5-2-5) جدول التوزيع التكراري النسبي لدرجات مادة الرياضيات

الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي%
25 – 34	4	0.100	10
35 – 44	2	0.050	5
45 – 54	4	0.100	10
55 – 64	9	0.225	22.5
65 – 74	8	0.200	20
75 – 84	7	0.175	17.5
85 – 94	6	0.150	15
المجموع	40	1.000	100

3-جدول التوزيع التكراري المتجمع *Cumulative Frequenc Table*

في بعض الأحيان قد تكون هناك حاجة الى معرفة عدد القيم أو المفردات التي تقل أو تزيد عن قيمة محددة، والجداول التي تحوي على مثل المعلومات هذه تدعى بالجداول التكرارية المتجمعة، وهناك نوعان من هذه الجداول

a. **جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد**
b. **جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل**

a. جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

وهو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تقل قيمتها عن الحد الادنى لفئة معينة، ويتكون من عمودين. العمود الأول نكتب فيه حدود الفئات كما موضح في الجدول (6-2-5). والعمود الثاني نكتب فيه التكرار التجميعي التصاعدي بالشكل الآتي:

تكرار ما قبل الفئة الأولى = f_0 = صفر

تكرار الفئة الأولى = f_1

تكرار الفئة الثانية = $f_1 + f_2$

تكرار الفئة الثالثة = $f_1 + f_2 + f_3$

وهكذا بحيث ان التكرار التجميعي التصاعدي للفئة الاخيرة = Σf_i

جدول (5-2-6) جدول التوزيع التكراري التجميعي التصاعدي لدرجات مادة الرياضيات.

حدود الفئات	التكرار التجميعي التصاعدي
اقل من 25	صفر
اقل من 35	4
اقل من 45	6
اقل من 55	10
اقل من 65	19
اقل من 75	27
اقل من 85	34
اقل من 95	40

b. جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

وهو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تزيد قيمتها عن الحد الادنى لفئة معينة، ويتكون من عمودين. العمود الأول نكتب فيه حدود الفئات والعمود الثاني نكتب فيه التكرار التجميعي التنازلي كما موضح في الجدول (5-2-7). بالطريقة الآتية:

تكرار الفئة الأولى = مجموع التكرارات = Σf_i

تكرار الفئة الثانية = مجموع التكرارات – تكرارالفئة الأولى

$$= f_1 - \Sigma f_i$$

تكرار الفئة الثالثة = $f_2 - f_1 - \Sigma f_i$

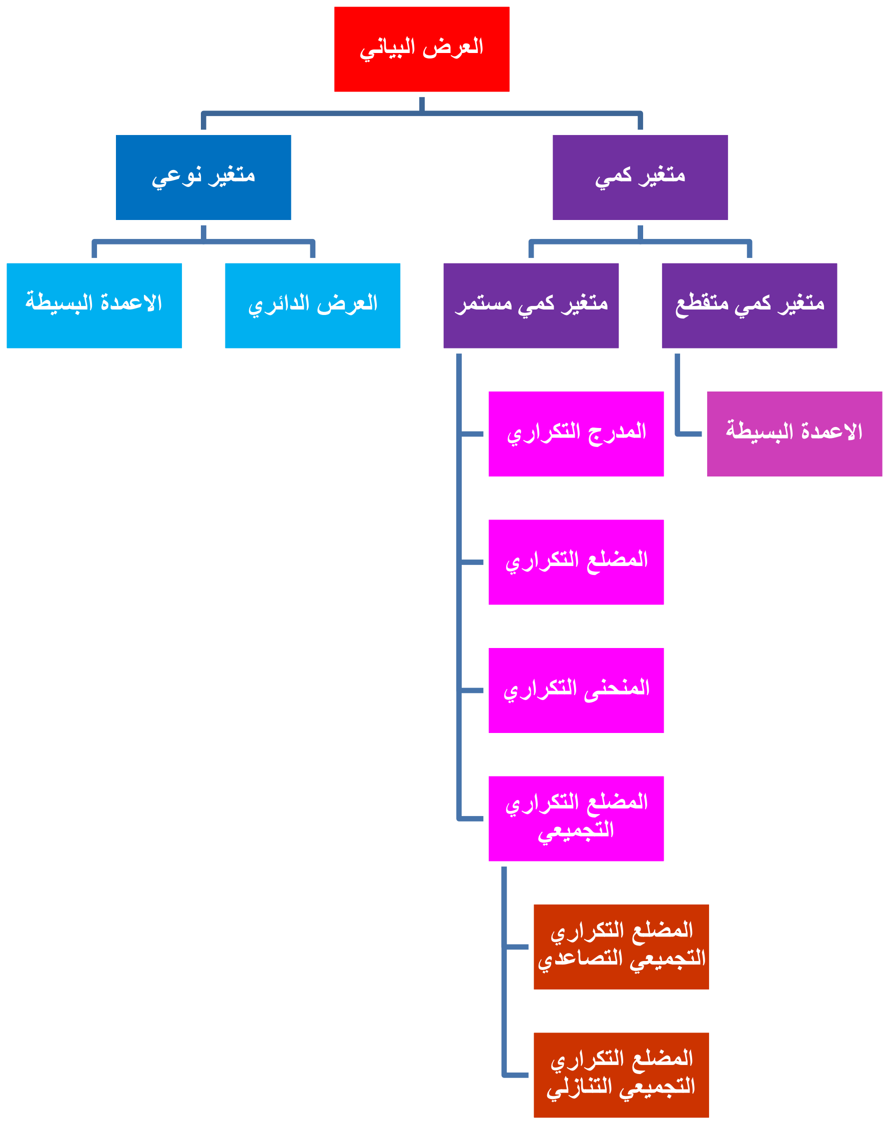
وهكذا بحيث ان التكرار التجميعي التنازلي للفئة الاخيرة = صفر

جدول (7-2-5) جدول التوزيع التكرار بالتجميعي التنازلي لدرجات مادة الرياضيات.

حدود الفئات	التكرار التجميعي التصاعدي
25 فأكثر	40
35 فأكثر	36
45 فأكثر	34
55 فأكثر	30
65 فأكثر	21
75 فأكثر	13
85 فأكثر	6
95 فأكثر	صفر

(5-3) التمثيل البياني (*Graphic Presentations*)

بالرغم من أن التوزيع التكراري أساسي وفعال في إظهار طبيعة البيانات وعلاقاتها إلا أن الرسم البياني يبين طبيعة البيانات وأهميتها بصورة أسرع للقارئ وبطريقة سهلة وجذابة وفعالة تساعده على فهم واستيعاب قيم الظاهرة أو الصفة للمتغير تحت الدراسة ومقارنتها مع بعضها، وتستخدم أنواع مختلفة للعرض البياني حسب نوعية المتغير المدروس. كما هو موضح في الشكل (5-3-1) أدناه .



شكل (5-3-1) مخطط لطريقة التمثيل البياني حسب نوع المتغير

(5-3-1)العرض البياني في حالة المتغير الكمي

a) العرض البياني في حالة المتغير الكمي المتقطع

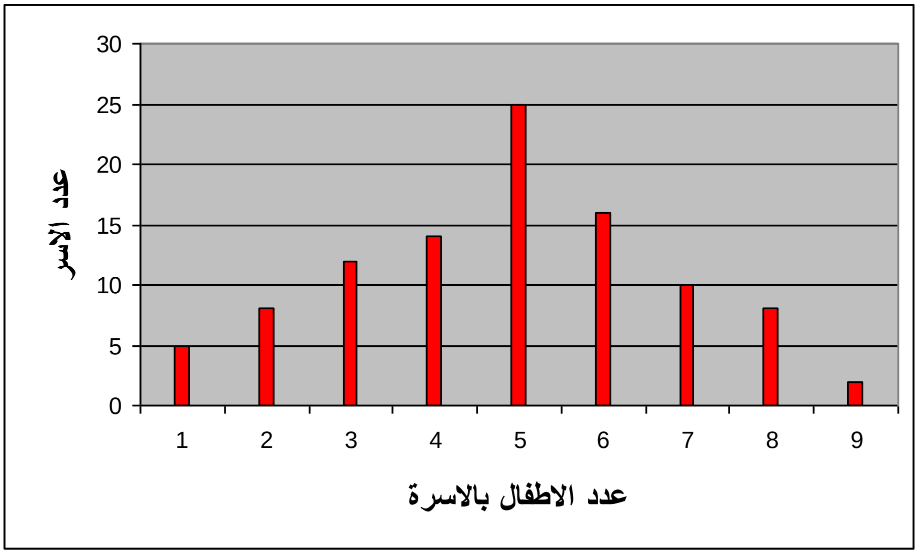
وهو المتغير الذي يأخذ أعداداً صحيحة فقط مثل عدد أفراد الأسرة، عدد الطلبة، عدد أشجار النخيل، عدد الأبقار في مزرعة ما .... الخ. وهنا يمكن استخدام الأعمدة البسيطة، وهي عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة العينة للمتغير المدروس.

مثال 3: يبين الجدول (5-3-1)عدد الأطفال في العائلة لعينة تكون من 100 أسرة، المطلوب عرض البيانات هذه بطريقة العرض المناسب البسيط.

جدول(5-3-1) جدول بيانات عدد الاطفال في كل اسرة

عدد الاطفال في كل اسرة	عدد الاسر
1	5
2	8
3	12
4	14
5	25
6	16
7	10
8	8
9	2
المجموع	100

الحل: أفضل وأبسط طريقة لعرض البيانات هذه هي أستعمال الأعمدة البسيطة

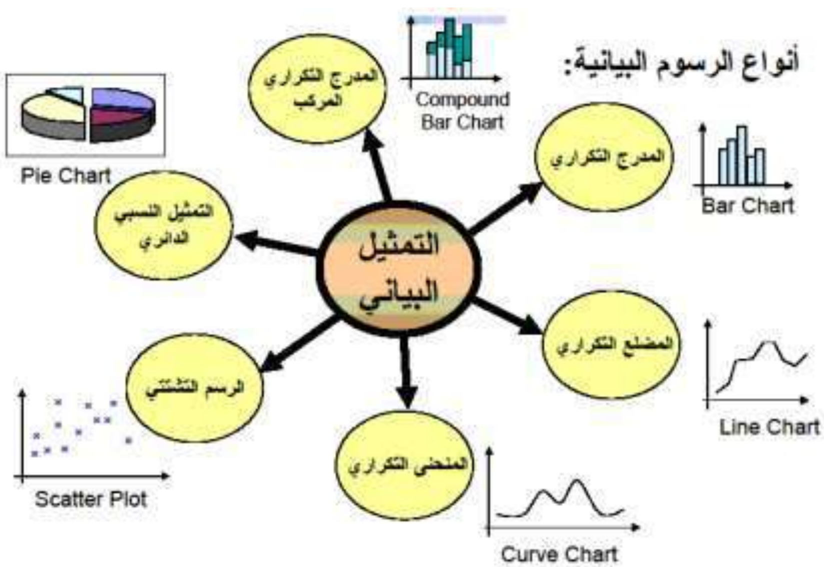


شكل(2-3-5) الرسم البياني بطريقة الأعمدة البسيطة لعدد الاطفال في الأسرة

b) العرض البياني في حالة المتغير الكمي المستمر

المتغير المستمر وهو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين قيمتين معينتين، وكأمثلة عن المتغيرات المستمرة: الطول، الوزن، الزمن، السرعة ...الخ. وهنا يمكن استخدام الأشكال الآتية:

(1)المدرج التكراري (*Frequency Histogram*)
(2)المضلع التكراري (*Frequency Polygon*)
(3)المنحنى التكراري (*Frequency Curve*)
(4)المضلع التكراري المتجمع (*Cumulative Frequency Polygon*)



شكل (3-3-5) أنواع الرسوم البيانية

(1)المدرج التكراري (*Frequency Histogram*)

وهو عبارة عن مستطيلات متلاصقة طول كل منها يتناسب مع التكرار المقابل، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة. لأجل تمثيل البيانات بالمدرج التكراري يجب أولاً رسم محورين متعامدين، الأفقي منها يمثل الفئات والرأسي يمثل التكرارات، وعلينا أن نجزئ المحور الأفقي إلى وحدات متساوية ونعين عليه الحدود الحقيقية للفئات ونجزئ المحور الرأسي على عدد التكرارات الواردة في الجدول.

والمدرج التكراري عبارة عن تمثيل كل فئة من الفئات بمستطيل تمثل قاعدته الحدود الحقيقية لتلك الفئات وأرتفاعه يساوي التكرار المقابل لها ، ومن الملاحظ أن الحد الأعلى الحقيقي للفئة الأولى هو نفس الحد الأدنى الحقيقي للفئة الثانية ، وبذا ترى جميع المستطيلات متلاصقة.

مثال4: اخذت عينة متكونة من 100 دجاجة بعمر 45 يوماً ، أخذت من أحد حقول الدواجن والجدول (5-3-2) يبين التوزيع التكراري لأوزان الدجاج بالغرام.

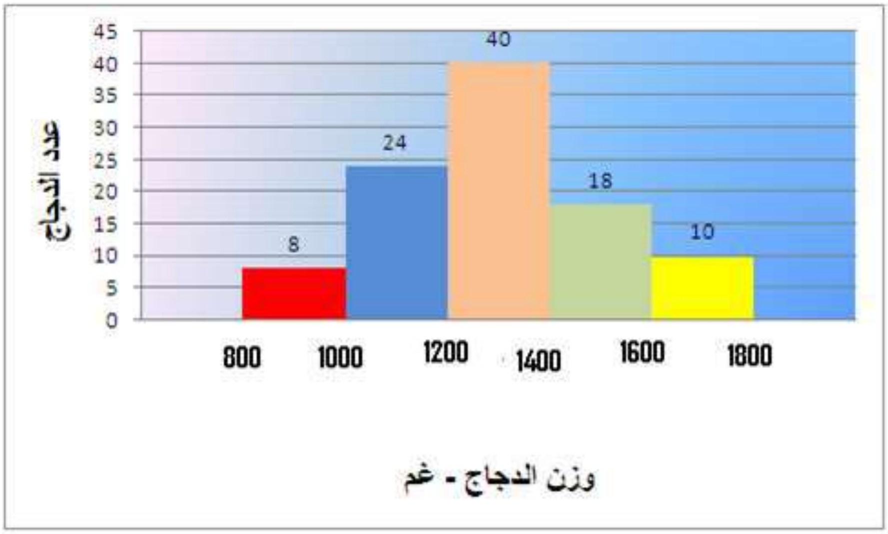
فئات الوزن	التكرار
800-1000	8
1000-1200	24
1200-1400	40
1400-1600	18
1600-1800	10
المجموع	100

جدول(2-3-5)جدول التوزيع التكراري لأوزان الدجاج (غم)

الحل: لرسم المدرج التكراري يتم إتباع الخطوات الآتية:

1. **رسم محورين متعامدين، الرأسي يمثل التكرارات، والأفقي يمثل الأوزان .**
2. **كل فئة تمثل بعمود أرتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة .**
3. **كل عمود يبدأ من حيث أنتهى به عمود الفئة السابقة.**

والشكل (4-3-5) أدناه يبين المدرج التكراري لأوزان الدجاج



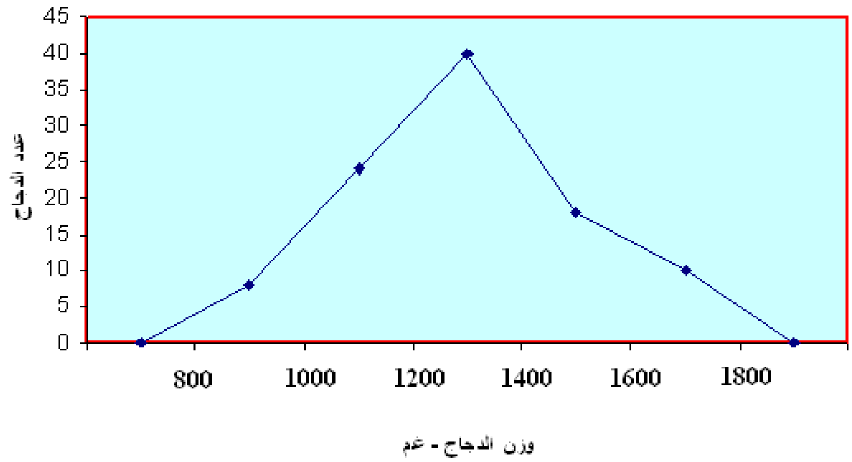
الشكل (4-3-5) المدرج التكراري لأوزان الدجاج

(2) المضلع التكراري (*Frequency polygone*)

هو مجموعة قطع مستقيمة متصلة ومنكسرة تتحدد بنقاط إحداثياتها مركز الفئة والتكرارات المقابلة.
ملاحظة: الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على المساحة التي تقع أسفل المضلع هذا، نقوم بقفل المضلع بان نصل بداية المضلع بالمحور الافقي بمركز فئة (خيالية) واقعة الى يسار أول فئة تكرارها صفراً. ونصل نهاية المضلع بالمحور الافقي بمركز فئة (خيالية) واقعة الى يمين آخر فئة تكرارها ايضاً صفر.
لرسم بيانات الجدول (2-3 -5) نقوم بما يلي:

1- **نقوم برسم المحور الأفقي والعمودي.**
2- **تدريج المحور الافقي الى أقسام متساوية بحيث يشمل على جميع مراكز الفئات، ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث تشمل كل التكرارات.**
3- **وضع نقطة امام مركز كل فئة، وارتفاعها يعادل تكرار تلك الفئة.**
4- **توصيل تلك النقاط بخطوط مستقيمة.**

والشكل التالي يمثل المضلع التكراري لبيانات الجدول (2-3- 5)

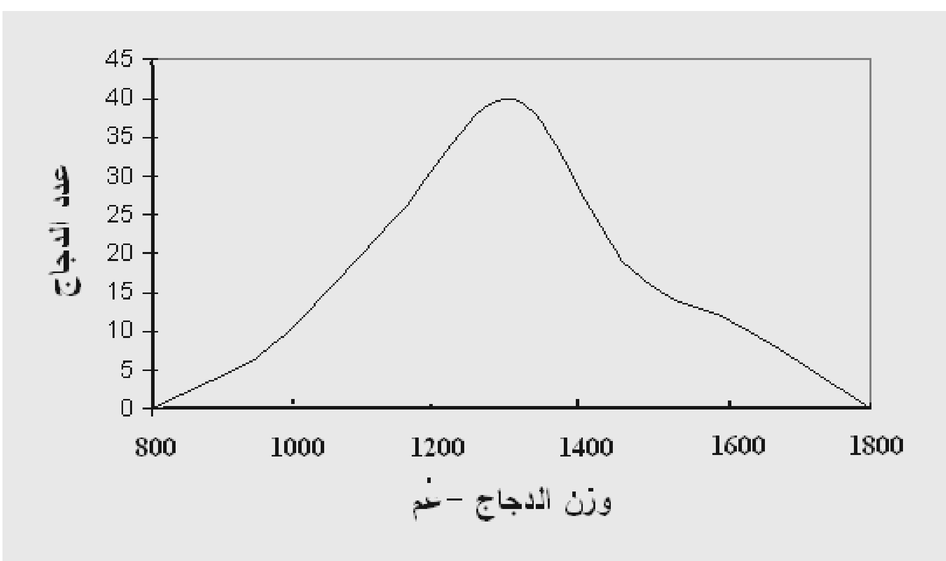


شكل(5-3-5) المضلع التكراري لبيانات الجدول 2-3-5

(3) المنحنى التكراري (*Frequency curve*)

بإتباع الخطوات السابقة نفسها المتبعة في رسم المضلع يمكن رسم المنحنى التكراري، لكن يتم تمهيد الخطوط المنكسرة في شكل منحنى ليمر بأكثر عدد من النقاط على مراكز الفئات والتي ارتفاعاتها تمثل تكرارات تلك الفئات.

وعادة يقفل المنحنى التكراري بان نصل بدايته بالحد الأدنى للفئة الأولى ونهايته بالحد الأعلى للفئة الاخيرة. وتكون مساحة المنحنى مكافئة (وليست مساوية) للمضلع التكراري. كما في الشكل (6-3-5)



شكل(6-3-5) المنحنى التكراري لبيانات الجدول(2-3-5)

(4) المضلع التكراري المتجمع (*Cumulative Frequency Polygon*)

لتمثيل التكرار التجميعي بيانيا نستخدم المضلع التكراري التجميعي، وهوعبارة عن خطوط متكسرة تصل بين نقاط واقعة فوق الحدود الحقيقية للفئات وعلى ارتفاع تمثل التكرار التجميعي. وهناك نوعان من المضلع التكراري المتجمع:

أولاً- المضلع التكراري التجميعي الصاعد

ثانياً- المضلع التكراري التجميعي النازل

أولاً- المضلع التكراري التجميعي التصاعدي

ولرسم المضلع التكراري التجميعي التصاعدي نتبع الخطوات الآتية:

1- رسم المحور الافقي والعمودي.
2- تدريج المحور الأفقي الى اقسام متساوية تشمل على جميع حدود الفئات ويقسم المحور العمودي الى أقسام متساوية حيث تشتمل على أكبر التكرارات التجميعية وهي المجموع الكلي للتكرارات.
3- وضع علامة أمام كل حد فئة ارتفاعها يعادل التكرار التجميعي التصاعدي لذلك الحد.
4- توصيل تلك النقاط بخطوط مستقيمة.

مثال5: ارسم المضلع التكراري التجميعي التصاعدي للجدول (2-3- 5)الآتي:

جدول(2-3-5) توزيع تكراري لأوزان 100 دجاجة.

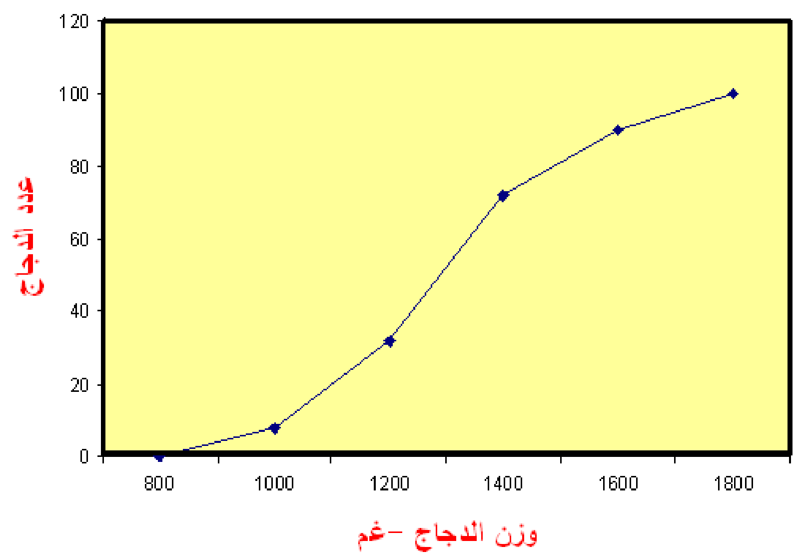
فئات الوزن	التكرار
800-1000	8
1000-1200	24
1200-1400	40
1400-1600	18
1600-1800	10
المجموع	100

الحل: لتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تقل عن كل حد من حدود الفئات.وكما يلي

جدول (3-3-5) جدول التكرار التجميعي التصاعدي

فئات الوزن	التكرارالتجميعي التصاعدي
اقل من 800	0
اقل من 1000	8
اقل من 1200	32
اقل من 1400	72
اقل من 1600	90
اقل من 1800	100
المجموع	100

ثم رسم المضلع التكراري التجميعي التصاعدي وكما يلي:



شكل(5-3-7) المضلع التكراري التجميعي التصاعدي لبيانات الجدول (3-3-5)

ثانياً- المضلع التكراري التجميعي التنازلي

ويرسم بنفس طريقة المضلع التكراري التجميعي التصاعدي ما عدا كون أرتفاع النقاط هنا هو التكرار التجميعي التنازلي، ولذلك يبدأ المضلع التكراري التجميعي التنازلي من أعلى نقطة (مجموع التكرارات الكلي) وينتهي بالصفر أي عكس المضلع التكراري التجميعي التصاعدي تماماً.

مثال6: ارسم المضلع التكراري التجميعي التنازلي للجدول (3-3-5)

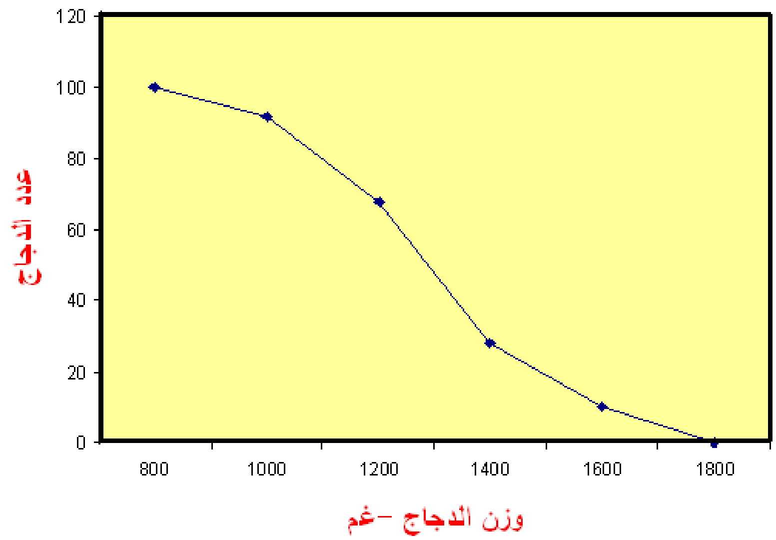
الحل: -

لتكوين الجدول التكراري المتجمع التنازلي، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تزيد عن كل حد من حدود الفئات. وكما يلي

جدول(4-3-5) جدول التكرار التجميعي التنازلي

فئات الوزن	التكرارالتجميعي التنازلي
اكبر من 800	100
اكبر من 1000	92
اكبر من 1200	68
اكبر من 1400	28
اكبر من 1600	10
اكبر من 1800	0
المجموع	100

ثم رسم المضلع التكراري التجميعي التنازلي وكما يلي:



شكل(8-3- 5)المضلع التكراري التجميعي التنازلي لبيانات الجدول (4-3-5)

(5-3-2) العرض البياني في حالة المتغير النوعي

1) العرض الدائري (*Pie Chart*)

ويتمثل في دائرة مقسمة إلى أجزاء متعددة كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارت المقابلة لكل خاصية (صفة) من الخصائص المدروسة، ولتحقيق ذلك نضيف عمودا إلى جدول المعطيات يحتوي على الزوايا المركزية المقابلة لكل تكرار.

بما ان زوايا الدائرة (الزاوية القطرية) أو الزاوية حول نقطة = °360

لذا نحسب الزاوية المركزية لكل خاصية أو صفة بالطريقة الآتية:

$$\text{الزاوية المركزية} = \frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{التكرار الكلي}} \times 360^\circ$$

نرسم دائرة ومن نقطة المركز نرسم نصف قطرها، وباستعمال المنقلة نرسم الزوايا المركزية لكل خاصية بحيث تكون مجموع الزوايا 360° . بعد ذلك نعطي كل زاوية لون يميزها عن البقية.

مثال7: يبين الجدول الآتي عدد النخيل لكل صنف في مزرعة. المطلوب عرض البيانات بطريقة العرض الدائري.

جدول(5-3-5) جدول التوزيع التكراري لأصناف أشجار النخيل

اصناف النخيل	العدد
خستاوي	1000
زهدي	400
برحي	700
مكتوم	1200
خضراوي	300
المجموع	3600

الحل:

1- نحسب الزوايا المركزية لكل صنف من النخيل وكالآتي

$$100^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{1000}{3600}\right) = \text{خستاوي}$$

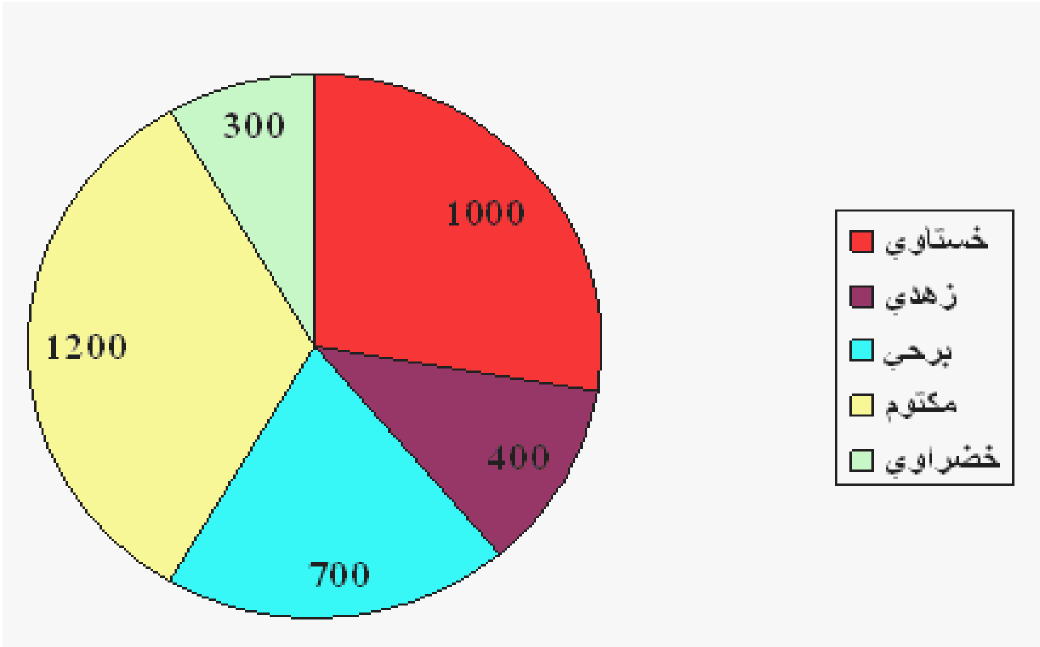
$$40^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{400}{3600}\right) = \text{زهدي}$$

$$70^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{700}{3600}\right) = \text{برحي}$$

$$120^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{1200}{3600}\right) = \text{مكتوم}$$

$$30^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{300}{3600}\right) = \text{خضراوي}$$

2- نرسم دائرة ثم باستعمال المنقلة نرسم الزوايا المركزية اعلاه فنحصل على الشكل الاتي



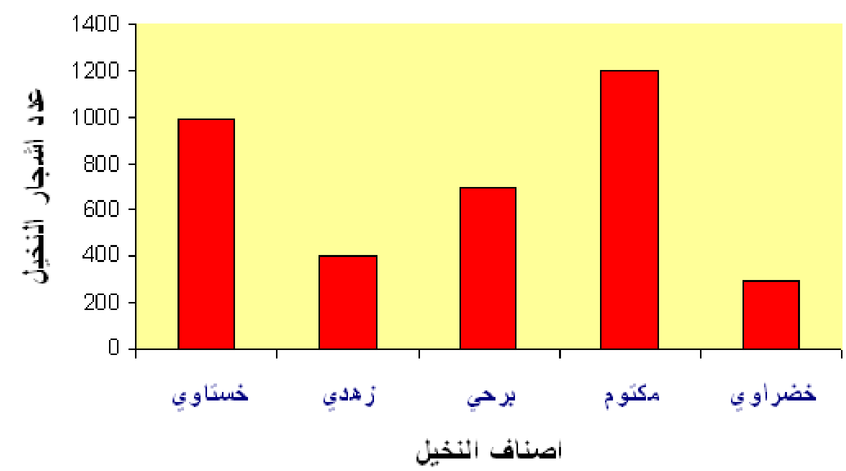
شكل(9-3-5) التمثيل الدائري لبيانات الجدول (5-3-5)

2) الأعمدة (*Bar Chart*)

وهو عبارة عن مجموعة من الأعمدة المتجاورة ذات القواعد المتساوية إلا أن أرتفاعها يتناسب مع تكرار كل خاصية، كما أن هذه الأعمدة تكون متباعدة بمسافات متساوية.

مثال8: أعرض بيانات المثال السابق باستخدام الاعمدة البسيطة

الحل:



الشكل 10-3-5. تمثيل بيانات أصناف أشجار النخيل بطريقة الأعمدة البسيطة

تمرين (5-1)

1. البيانات الآتية تبين عدد الغيابات التي سجلها طلبة أعدادية الزراعة في محافظة بابل في الفصل الأول من السنة.

3	5	2	6	2	3	7	5	3	4	6	1	4	5	9
0	5	2	1	5	0	0	4	5	5	9	4	3	3	2
4	1	2	3	2	0	3	5	1	1	1	2	2	2	1

المطلوب: -1) حدد المجتمع الأحصائي والمتغير الأحصائي ونوعه؟

2) لخص البيانات هذه في جدول إحصائي؟

2. البيانات الآتية تمثل رواتب 50 شخصاً في إحدى المؤسسات شهريا (بالاف الدنانير).

250	200	360	370	375
170	180	180	180	230
280	350	120	120	120
110	460	520	520	520
380	380	390	90	100
400	420	420	440	375
640	650	390	400	400
630	350	360	360	360
640	620	620	620	620
460	540	540	600	600

المطلوب: لخص البيانات أعلاه في جدول توزيع تكراري من 7 فئات متساوية الطول؟

3. فيما يلي درجات 60 طالب في الامتحان النهائي لمادة الرياضيات

40	85	36	56	83	67	45	92	72	88	55	71
35	29	94	86	47	25	93	87	64	73	61	55
67	60	57	87	72	29	51	89	67	65	48	59
56	92	87	79	59	43	76	74	62	88	27	90
76	58	40	71	69	53	81	66	70	75	81	34

المطلوب: 1) احسب المدى للبيانات أعلاه.

2) تفريغ البيانات أعلاه في جدول توزيع تكراري لفئات متساوية الطول.

3) لخص البيانات في جدول توزيع تكراري.

4) ارسم المدرج التكراري.

5) ارسم المضلع التكراري.

6) ارسم المنحنى التكراري.

4. مستخدماً بيانات السؤال الثالث: -

1) كون جدول توزيع تكراري متجمع تصاعدي.

2) كون جدول توزيع تكراري متجمع تنازلي.

3) ارسم المضلع التكراري التصاعدي.

4) ارسم المضلع التكراري التنازلي.

5. **البيانات الآتية تمثل توزيع منتسبي أحد المصانع حسب التخصص.**

التخصص	عدد العاملين
خبير	5
رئيس مهندسين	10
مهندس	30
عامل ماهر	40
عامل غير ماهر	20
اداري	15

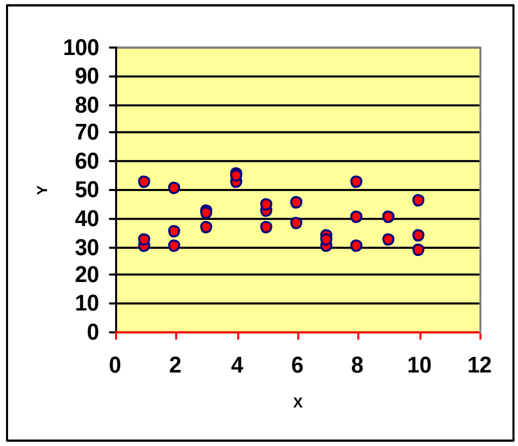
المطلوب:

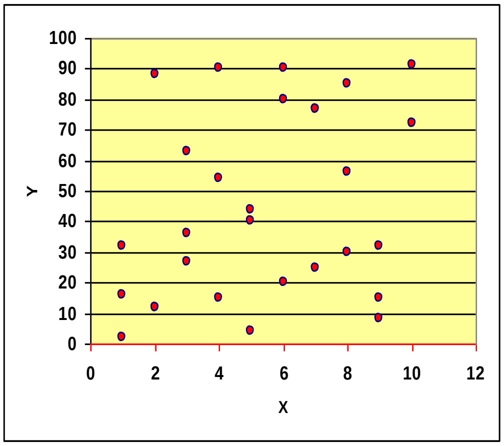
1) **ما نوع المتغير؟**
2) **مثل البيانات بطريقة التمثيل الدائري.**

6. **مثل البيانات في السؤال الخامس بطريقة الأعمدة البسيطة.**

(5-4) التشتت او الاختلاف

تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمتها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة. أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول إن مفردات الظاهرة مشتتة وغير مركزة. ومقاييس التشتت هي مقاييس لمدى تشتت قيم المشاهدات عن وسطها. وعلى ذلك يمكننا ان نتخذ مقدار التشت كدليل على تجمع القيم وقربها من بعضها أو على تفرقها وتباعدها عن بعضها، وهكذا يكون لدينا مقياس لمقدار تجانس المجموعات الاحصائية أو عدم تجانسها، ويمكن ملاحظة الشكل (4-5) والاستدلال عن الفرق بين المجموعات الاحصائية في مدى تجانسها.





(b) **الشكل (5-1)** (a)

درجة تشتت البيانات الاحصائية تشتت (a) > تشتت (b)

وكما تعرفنا في البند السابق على مقاييس النزعة المركزية والتي اعطتنا فكرة اولية عن التوزيع التكراري فمن الواضح ان وصف التوزيع التكراري بأحد تلك المقاييس يعطينا فكرة ناقصة عن حقيقة المجموعة التي يمثلها التوزيع ، كما ان المقارنة بين المجموعات بناءً على متوسطها فقط تكون ناقصة، كذلك ان لم تكن مضللة فعلاً. فقد يحدث ان يتساوى متوسطا مجموعتين ومع ذلك تكون مفرداتها مختلفة كل الاختلاف ، فربما تكون مفردات المجموعة الاولى قريبة في القيمة من متوسطها اي مركزة حوله بينما تكون مفردات المجموعة الثانية بعيدة في القيمة وتختلف كثيرا عن متوسطها فيكون بعضها اكبر منه بكثير والآخر أقل منه بكثير. وكما يتضح من مقارنة المجموعتين الآتيتين:

المجموعة الاولى	**12**	**10**	**8**	**13**	**9**	**11**	**7**
المجموعة الثانية	**15**	**4**	**31**	**2**	**7**	**8**	**3**

فالوسط الحسابي لكلا المجموعتين يساوي 10 ولكن المجموعة الاولى تبدو أكثر تجانساً . من أجل ذلك لجأ الإحصائيون إلى استخدام مقاييس أخرى لقياس مدى تجانس البيانات، أو مدى انتشار البيانات حول مقياس النزعة المركزية، ويمكن استخدامها في المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات، وسميت بمقاييس التشتت أو الاختلاف. وهناك عدة مقاييس للتشتت اهمها :

أولاً – مقاييس التشتت المطلق

أي التي تكون وحداتها نفس وحدات القيم الاصلية وأهمها:

1- المدى (*Range*)

2 – متوسط الانحراف (*Mean Deviation*)

3- الانحراف المعياري (*Standard Deviation*)

4- التباين (*Variance*)

5- الخطأ القياسي (*Standard Error*)

ثانيا- مقاييس التشتت النسبي

إن مقياس التشتت النسبي له أهميته عند مقارنة تشتت مجموعتين(أو أكثر) تختلف في وحدات القياس لقيمها. لأن مقاييس التشتت النسبي تكون خالية من وحدات القياس ، وأهم مقياس للتشتت النسبي هو معامل الاختلاف (*Coefficient of Variation*).

[5-4-1] :- مقاييس التشتت المطلق

[5-4-1-1]المدى (*Range*)

تعريف المدى
المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أعلى قيمة وأقل قيمة في تلك المجموعة من القيم ويرمز له R

$$R = x_{max} - x_{min}$$

يتميز هذا المقياس بسهولة حسابه واعطائه فكرة سريعة ومبسطة عن درجة تشتت قيم المجموعة. إلا ان نقطة ضعفه انه يهمل جميع قيم المجموعة فيما عدا القيمتين العليا والدنيا وكثير التأثر بالقيم المتطرفة. ونتيجة لنقطة الضعف هذه فانه يعجز عن تمييز درجات تشتت المجموعات بشكل حازم بدليل أن قيمة المدى لمجموعة القيم في الجدول ادناه تساوي $25 - 8 = 17$

8	25	23	20	23	21

وهي مساوية لقيمة المدى لمجموعة القيم أدناه والتي تساوي $30 - 13 = 17$

13	23	30	16	20	18

رغم الاختلاف الواضح في درجتي تشتت المجموعتين . لهذا السبب فان هذا المقياس محدود الاستخدام مقارنة بالمقاييس التي تأخذ بنظر الأعتبار جميع القيم وتقيس تشتتها عن قيمة معينة كاساس لقياس التشتت والتي عادة ما تكون المتوسط الحسابي.

مثال 1:- تم زراعة 9 وحدات تجريبية بمحصول القمح ، وتم تسميدها بنوع معين من الأسمدة الفسفورية، وفيما يلي بيانات كمية الإنتاج من القمح بالطن /هكتار

4.8	**6.21**	**5.4**	**5.18**	**5.29**	**5.18**	**5.08**	**4.63**	**5.03**

والمطلوب حساب المدى.

الحل :

$$R = x_{max} - x_{min}$$

$$R = 6.21 - 4.63 = 1.58$$

اي ان المدى للمحصول يساوي 1.58 طن / هكتار

مثال 2:- الجدول الآتي يمثل مراقبة التقلبات السعرية لقيم اسهم شركتين (A و B) بالدينار، اوجد قيمة المدى لسعري السهمين في الشركتين

الشركة A	38	32	24	35	30	40
الشركة B	50	48	49	45	47	34

الحل:

المدى للشركة A	R = 40 – 24 = 16
المدى للشركة B	R = 50 – 34 = 16

وهذا يعني ان المدى للتغير في اسعار اسهم الشركتين متساوي

[5-4-1-2] الانحراف المتوسط (*Mean Deviation*)

تعريف الانحراف المتوسط

إذا كانت لدينا n من المشاهدات $x_1, x_2, \dots x_n$ فان الانحراف المتوسط لها هو متوسط الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات (أي أهمال الاشارة) عن وسطها الحسابي ويرمزله $M.D$

$$M.D = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

ولأن مقاييس التشتت هي مقاييس لقوة تجمع البيانات حول بعضها، وحيث أن التجمع يكون حول القيم المتوسطة، فإنه إذا كان مقدار الاختلاف بين القيم ومتوسطها كبيرا دل ذلك على أن التشتت كبير والعكس صحيح. وحيث أن مجموع الاختلافات (الانحرافات) عن المتوسط يساوي صفرا ، فإنه لو حسبنا القيم المطلقة لمقدار الاختلاف عن المتوسط يكون متوسط هذه الاختلافات مقياسا مناسبا لمقدار التشتت، يسمى هذا المقياس بالانحراف المتوسط. ويمتاز هذا المقياس بانه يأخذ جميع القيم وسهل الحساب ولكن يعاب عليه بانه يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 3:- **اوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية**

4	**6**	**5**	**8**	**2**

الحل: الخطوة الاولى:- استخراج الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{4+6+5+8+2}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

الخطوة الثانية:- ايجاد انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي (مع أهمال الاشارة)

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
4	**4-5=-1**	**1**
6	**6-5=1**	**1**
5	**5-5=0**	**0**
8	**8-5=3**	**3**
2	**2-5=-3**	**3**
المجموع		**8**

$$M.D = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$$

$$M.D = \frac{8}{5} = 1.6$$ **الانحراف المتوسط**

مثال 4:-

جد قيمة الانحراف المتوسط للبيانات الآتية التي تمثل أوزان عشرة من رؤوس اللهانة بالكيلوغرام

2.8	**2.3**	**1.7**	**2.0**	**1.2**	**2.5**	**2.0**	**1.8**	**2.2**	**1.5**

الحل:

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{(2.8)+(2.3)+(1.7)+(2.0)+(1.2)+(2.5)+(2.0)+(1.8)+(2.2)+(1.5)}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

2.8	2.3	1.7	2.0	1.2	2.5	2.0	1.8	2.2	1.5	القيم
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	المتوسط الحسابي
0.8	0.3	−0.3	0	−0.8	0.5	0	−0.2	0.2	−0.5	الانحراف المتوسط
0.8	0.3	0.3	0	0.8	0.5	0	0.2	0.2	0.5	مطلق الانحراف المتوسط

$$M.D = \frac{\sum|x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$\therefore \; M.D = \frac{(0.8)+(0.3)+(0.3)+(0)+(0.8)+(0.5)+(0)+(0.2)+(0.2)+(0.5)}{10}$$

$$M.D = \frac{3.6}{10} = 0.36$$ **الانحراف المتوسط**

[5-4-1- 3] التباين (*Variance*)

للتغلب على مشكلة الاشارات عند جمع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي والتي تؤدي دائما لان يكون مجموع انحرافات أي عينة عن وسطها الحسابي يساوي صفراً. وبدلا من اخذ القيم المطلقة للانحرافات اي بدون اشارات فأننا نستطيع ان نتغلب على ذلك بطريقة اخرى وهي بتربيع قيم الانحرافات وبذلك تصبح جميعها موجبة. اي نحصل على مجموع مربعات الانحرافات والتي نرمز لها (SS) إختصاراً للعبارة (*Sum of squares*) وعلى ذلك فان

$$S.S = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ولكي نأخذ بنظر الاعتبار حجم العينة حتى يمكن مقارنة العينات المختلفة الاحجام فأننا نقسم مجموع مربعات الانحرافات على $(n-1)$ عند حساب التباين للعينة ونسمي $(n-1)$ بدرجات الحرية. ويرمز لتباين العينة بالرمز (S^2).

ملاحظة:- وجد إن قسمة مجموع مربعات الانحرافات على ($n-1$) بدلاً من (n) يعطي تقييم أفضل خاصة إذا كان حجم العيّنه صغيراً ((أقل من 30 مشاهدة)).

تعريف التباين
هو متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

ويحسب تباين العينة بإحدى العلاقتين الآتيتين :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}}{n-1}$$

ونظراً لأننا عند حساب التباين قمنا بتربيع الانحرافات فان قيمة التباين تكون مقاسة بمربع الوحدات المستخدمة في قياس المشاهدات. فإذا كانت المشاهدات مقاسة بالسنتمتر فان التباين يكون بالسنتمتر المربع ولا توجد مشكلة في ذلك ، ولكن المشكلة عندما تكون وحدات المشاهدات كالأوزان بالكغم أو عدد الاطفال في الأسر أو عدد الموظفين في شركة ما، فالتباين عنده يقاس بالكغم المربع او الطفل المربع او الموظف المربع وهذه كلها غير ذات معنى.
والحل لتلك المشكلة هي ارجاع الوحدات الى اصلها وذلك بأخذ الجذر التربيعي للتباين لنحصل على ما يسمى بالانحراف المعياري (S) والذي سوف يكون مقاساً بالوحدات الاصلية.

مثال 5:- **اخذت عينة مؤلفة من 6 نباتات بطاطا وحسبت عدد الثمار بالنبات الواحد فكانت كالآتي ، احسب تباين عدد الثمار بالنبات .**

8	**10**	**7**	**8**	**4**	**5**

الحل :- الطريقة الاولى :-
الخطوة الاولى : حساب الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6}x_i}{6} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_6}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5+4+8+7+10+8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

الخطوة الثانية :

عدد الثمار	8	10	7	8	4	5
$x_i - \overline{x}$	1	3	0	1	-3	-2
$(x_i - \overline{x})^2$	1	9	0	1	9	4

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{1+9+0+1+9+4}{6-1} = \frac{24}{5} = 4.8$$

الطريقة الثانية :-

x_i	${x_i}^2$
8	64
10	100
7	49
8	64
4	16
5	25
$\sum x_\mathrm{i} = 42$	$\sum {x_\mathrm{i}}^2 = 318$

$$S^2 = \frac{\sum(x_\mathrm{i})^2 - \frac{(\sum x_\mathrm{i})^2}{n}}{n-1} = \frac{318 - \frac{1764}{6}}{6-1} = \frac{318-294}{5} = 4.8$$

مثال 6:- اخذت عينة مؤلفة من 10 من أشجار العنب وحسب كمية الحاصل بالكيلوغرام وكما يلي ، أحسب التباين؟

5	11	9	14	10	15	12	6	8	10

الحل :-

الطريقة الاولى:- اولاً نستخرج الوسط الحسابي

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10}}{10}$$

$$= \frac{5 + 11 + 9 + 14 + 10 + 15 + 12 + 6 + 8 + 10}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

x_{i}	5	11	9	14	10	15	12	6	8	10
$x_i - \overline{x}$	-5	1	-1	4	0	5	2	-4	-2	0
$(x_i - \overline{x})^2$	25	1	1	16	0	25	4	16	4	0

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 25 + 1 + 1 + 16 + 0 + 25 + 4 + 16 + 4 + 0 = 92$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2}{n - 1} = \frac{92}{9} = 10.22$$

الطريقة الثانية:-

x_i	5	11	9	14	10	15	12	6	8	10	$\sum xi = 100$
$(x_i)^2$	25	121	81	196	100	225	144	36	64	100	$\sum (x_i)^2 = 1092$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{1092 - \frac{100^2}{10}}{10-1} = \frac{1092 - 1000}{9} = \frac{92}{9} = 10.22$$

[5-4-1-4] الانحراف المعياري (*Standard Deviation*)

يعتبر الانحراف المعياري من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت، وهو الأكثر استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية، لأنه يعطي فكرة سليمة ومنطقية عن ظاهرة التشتت.

و لحساب الانحراف المعياري للعينة والذي يرمز له بالرمز S نستعمل العلاقة الآتية:-

تعريف الانحراف المعياري
يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

اي ان الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين $S = \sqrt{S^2}$

ويمتاز الانحراف المعياري بسهولة حسابه وشموله على جميع قيم المشاهدات لذا فهو يعتبر من ادق معايير التشتت الاحصائية ، وله نفس وحدات القياس للظاهرة قيد الدراسة. ويعاب عليه تأثره بالقيم المتطرفة للبيانات ولا يمكن حسابه للقيم الوصفية.

مثال 7:- اخذت عينة مؤلفة من خمسة بساتين وحسبت أشجار الزيتون في كل منها فكانت كما يلي، احسب الانحراف المعياري لعدد اشجار الزيتون.

9	7	10	6	8

الحل: نحسب الوسط الحسابي لقيم المتغير

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_5}{5}$$

x_{i}	9	7	10	6	8
$x_i - \bar{x}$	1	-1	2	-2	0
$(x_i - \bar{x})^2$	1	1	4	4	0

$$= \frac{9 + 7 + 10 + 6 + 8}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

ثم نحسب التباين :-

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{1 + 1 + 4 + 4 + 0}{4}$$

$$S^2 = \frac{10}{4} = 2.5$$

ثم نأخذ الجذر التربيعي للتباين للحصول على الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{2.5} = 1.581$$

مثال 8:- **اخذت عينة مكونة من 8 أبقار وحسبت كمية انتاج الحليب بالـ (كغم) في اليوم الواحد فكانت النتائج كما يلي:**

x_i	10	12	8	9	5	15	13	8

احسب الانحراف المعياري للكمية المنتجه من الحليب .

الحل: الطريقة الاولى:-

1- حساب المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_8}{8}$$

$$= \frac{10+12+8+9+5+15+13+8}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

-2

x_i	10	12	8	9	5	15	13	8
$(x_i - \bar{x})^2$	0	4	4	1	25	25	9	4

$$\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 = 0 + 4 + 4 + 1 + 25 + 25 + 9 + 4 = 72$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{72}{7}} = \sqrt{10.29} = 3.21$$

الطريقة الثانية:-

x_i	10	12	8	9	5	15	13	8	$\sum x_i = 80$
$(x_i)^2$	100	144	64	81	25	225	169	64	$\sum (x_i)^2 = 872$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 80 \quad , \quad \sum_{i=1}^{8} (x_i)^2 = 872$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{872 - \frac{(80)^2}{8}}{7}} = \sqrt{\frac{872-800}{7}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$$

$$= \sqrt{10.29} = 3.21$$

5-1-4 -5 الخطأ المعياري (الخطأ القياسي)(***Standard Error***)

كانت مقاييس التشتت السابقة عبارة عن إحصاءات لقياس تشتت المفردات داخل العينة وكان الانحراف المعياري هو أهم تلك المقاييس إذ أنه يقيس انحراف مفردات العينة عن متوسطها الحسابي.

تعريف

الخطأ المعياري هو عبارة عن تقدير للانحراف المعياري للمتوسطات الحسابية المحسوبة من عدد العينات العشوائية الكبيرة الحجم (30 فردا فأكثر) المأخوذة من مجتمع واحد متجانس.

استعمالات الخطأ المعياري:

1- تعتبر قيمة الخطأ المعياري كمقياس لدرجة الاعتماد على متوسط العينة، بمعنى أن المتوسط الذي تكون قيمة الخطأ المعياري له صغيرة يمكن الاعتماد عليه أكثر من المتوسط الذي تكون قيمة الخطأ المعياري له كبيرة.

2- يفيد استعمال الخطأ المعياري في تحديد حجم العينة.

3- يعطي الخطأ المعياري فكرة عن متوسط المجتمع ، فلقد وجد أن متوسطات العينات العشوائية الكبيرة المأخوذة من مجتمع واحد متجانس تتوزع توزيعا معتدلا تقريبا ، حتى ولو لم تكن مفردات المجتمع نفسها

معتدلة التوزيع . وبذلك تكون النقطة على المنحني المعتدل التي تتركز حولها متوسطات العينات أحسن تقديراً لمتوسط المجتمع.

4- يمكن استعمال الخطأ المعياري لمقارنة متوسطين مختلفين لمعرفة حقيقة الفرق بينهما.

طريقة حساب الخطأ المعياري: **يرمز للخطأ المعياري أو القياسي بالرمز $S_{\bar{x}}$ ويحسب بإحدى العلاقتين الآتيتين :-**

$$\boxed{S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{او} \quad \boxed{S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}}}$$

مثال 9:- جد الخطأ المعياري للبيانات في الجدول الآتي :-

6	9	6	4	5

الحل :- 1) إيجاد الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(6^2 + 9^2 + 6^2 + 4^2 + 5^2) - \frac{(6+9+6+4+5)^2}{5}}{5-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{194 - \frac{30^2}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{194 - \frac{900}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{194 - 180}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{3.5} = 1.87$$

2) إيجاد الخطأ المعياري

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.87}{\sqrt{5}} = \frac{1.87}{2.236} = 0.836$$

[5-4-2] مقاييس التشتت النسبي

كانت مقاييس التشتت التي ذكرت سابقا كلها مقاييس مطلقة ، تقدر بدلالة وحدات القياس المستعملة في قياس المتغير الموضوع تحت البحث والدراسة ، سواء كانت هذه الوحدات مقاسة بالسنتيمتر أو المتر أو الكيلو غرام وغيره ، وعلى ذلك فإذا أردنا مقارنة عينتين أو مجتمعين فقد يحول دون ذلك اختلاف وحدات القياس المستعملة في كل منهما. لذا فان مقاييس التشتت النسبي تكون مناسبة في هذا المجال لكونها خالية من وحدات القياس ، واهم مقاييس التشتت النسبي معامل الاختلاف والذي سنورد تفاصيله فيما يأتي :-

[5-4-2-1] معامل الاختلاف (*Coefficient of Variation*)

ان درجة التشتت بين قيم مفردات مجموعة معينة تختلف عادة عن درجة التشتت لمجموعة اخرى، وقد يكون هذا الاختلاف كبيراً او صغيراً. وبناءً على ذلك لا بد من وجود وسيلة لمقارنة درجات التشتت بين المجموعات المختلفة. وخاصة إذا اختلفت هذه المجاميع بوحدات القياس ، وعليه فأن الامر يتطلب الاستعانة بمقياس تشتت يحوّل قيمة الانحراف المعياري الى نسبة مئوية من المتوسط الحسابي وبذلك يأخذ بنظر الاعتبار التفاوت في القياسات الاصلية للبيانات ويتخلص من وحدات القياس ويوصلنا الى نسبة مئوية قابلة للمقارنة ، ويطلق على هذا المقياس بمعامل الاختلاف ويرمز له (C.V) .

تعريف معامل الاختلاف (C.V)

إذا كان S و $\bar{X}$ هما الانحراف المعياري والوسط الحسابي لمجموعة من القيم على التوالي فان معامل الاختلاف لها يساوي

$$\boldsymbol{C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100}$$

مثال 10:- في إحدى الإحصائيات كانت نتائج الامتحان النهائي لمادتي الرياضيات والكيمياء للصف الرابع العلمي في احدى المدارس كالآتي

	الرياضيات	الكيمياء
الوسط الحسابي	80	72
الانحراف المعياري	8	6

ففي اي المادتين كان التشتت **اكبر؟**

الحل :- معامل الاختلاف لمادة الرياضيات $C\,.V = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$

معامل الاختلاف لمادة الكيمياء $C.V = \frac{6}{72} \times 100 = 8.33\%$

اي ان التشتت في درجات مادة الرياضيات كان اكثر

مثال 11:- **اجريت مقارنة صفة ارتفاع النبات بالـ(cm) وكمية الحاصل بالـ(gm) لعينة مكونة من 100 نبات من الذرة الصفراء وكانت النتائج كما يلي:**

	الارتفاع	الحاصل
الوسط الحسابي	200	800
الانحراف المعياري	16	36

قارن بين تشتت الصفتين.

الحل:- معامل الاختلاف لارتفاع النبات $C\,.V = \frac{16}{200} \times 100 = 8\ \%$

معامل الاختلاف للحاصل $C\,.V = \frac{36}{800} \times 100 = 4.5\ \%$

اي ان تشتت صفة ارتفاع النبات اكبر من تشتت كمية الحاصل.

تمارين(2-5)

1. احد المقاييس الآتية هو مقياس للتشتت

المنوال	الوسيط	المدى	الوسط الحسابي

2. احد المقاييس الآتية ليس مقياساً للتشتت

الانحراف المتوسط	معامل الاختلاف	المنوال	التباين

3. لكل من المجموعات الآتية احسب:

a) المدى
b) الانحراف المتوسط
c) التباين
d) الانحراف المعياري
e) معامل الاختلاف

$(1) x_i = 3, 6, 8, 10, 4, 5$

$(2) x_i = 1, 8, 9, 5, 12, 8, 0, 7, 3$

$(3) x_i = 5, -3, 2, -4, 10, 12, -8, 11$

4. اوجد القيم المفقودة في جدول البيانات الآتي :-

C.V	S	$\bar{X}$	
20 %	10	؟	1
؟	25	40	2
5 %	؟	25	3