



جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للتعليم المهني

الرياضيات

الثاني

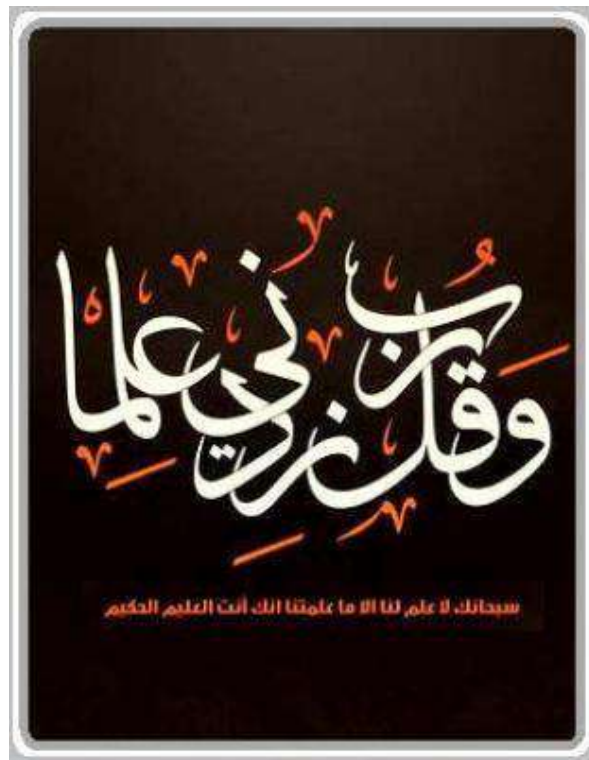
الزراعي – فرع الفنون التطبيقية

المؤلفون

د. فوزي عبدالحسين العبيدي د. أياد غازي ناصر فؤاد عبد الحميد عبدالمجيد
محمد عبد الغفور الجواهري ثائر عبد العباس مطشر مهند عبد الحمزه مرزا
نظير حسن علي

1447هـ - 2025م

الطبعة السابعة



المقدمة

تهتم المديرية العامة للتعليم المهني منذ مدة ليست ببعيدة بإعادة النظر في الكتب المنهجية بهدف تطويرها وتعديلها أو استبدالها لتتماشى مع المستوى المتساعد للمناهج في أرجاء المعمورة عامة.

وقد باشرت شعبة المناهج في المديرية العامة للتعليم المهني بخطوة إيجابية باتجاه التكامل مع التجارب الدولية المتقدمة في المناهج الحديثة. وقد تمثلت الخطوة هذه بإعادة تأليف كتاب الرياضيات لغالبية فروع التعليم المهني ليسهم الكتاب الجديد في تأصيل المهارات الضرورية اللازمة لابنائنا الطلبة بأسلوب مبسط يخلو من التعقيد وبالاستعانة بالتطبيقات والجدول والاشكال التي تدعم عملية اكتساب المهارات هذه.

وقد عملنا عند وضع الاهداف السلوكية لتدريس علم الرياضيات لفرع التعليم الزراعي والفنون التطبيقية أن تكون المفاهيم الرياضية معروضة في المنهج بطريقة مبسطة وبأستخدام عبارات سهلة وأمثلة بسيطة وقابلة للأستيعاب دون الشعور بالملل أو الأرهاق من صعوبة وجدية المادة الرياضية .

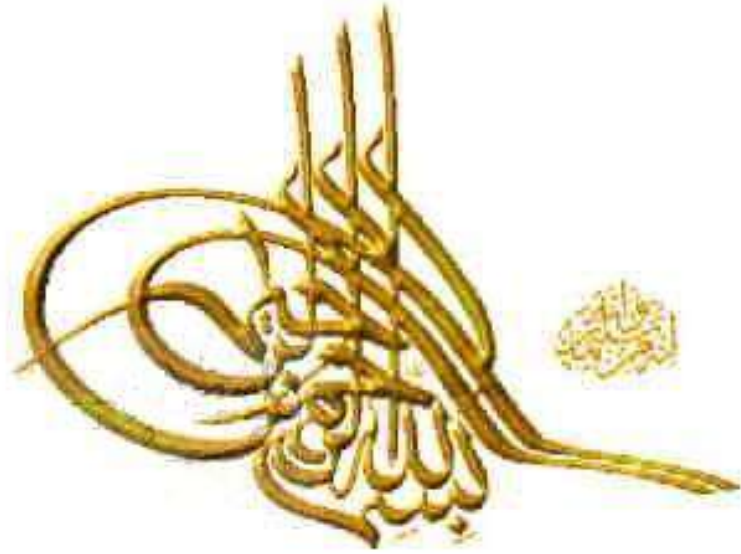
يقول الرياضي والمربي اليوغسلافي الشهير(زلاتكاشبورير Zlatka Shporer) في كتابه ((الرياضيات في حياتنا)) ((لقد أصبحت الكتب المدرسية أكثر تجريداً ولذلك علينا استخدام طريقة المسلمات الأساسية في عرض المفاهيم الرياضية)) كما يقول ((من أجل الرياضيات ليس من الضروري أن تكون مبتدلاً... ومن أجل العرض المبسط لا توجد ضرورة لتفسير كل شي بسيط ... كما أن المدخل الجدي في الرياضيات يجب أن لا يكون مملأ بالضرورة)) . لذلك فقد عملنا على ألا نضع في متن كتابنا هذا براهيناً مطولة أو وصفاً موسعاً للبنية الرياضية التي تضمنها الكتاب ، كما أن التكرارات الكثيرة للأمثلة في الكتاب مع المراجعة المستمرة إلى ما سبق وأن تمت دراسته في المراحل السابقة وأضافه شيء جديد له لا يعد نقصاً في الكتاب بل نعه من أهم محاسنه.

الكتاب هذا هو الكتاب الثاني من كتابين تم إعدادهما لطلبة المدارس الزراعية ويتألف من ثمانية فصول تبدأ بالفصل الأول الذي يتناول الأسس واللوغاريتمات ، أما الفصل الثاني فإنه يتناول الغاية والأستمرارية ويتناول الفصل الثالث حساب التفاضل ، فيما تناولت الفصول (4، 5، 6، 7) علم الأحصاء بتتابع منسق يتيح للطلاب تلمس طبيعة العلم هذا وأدراك ماهية مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت أو الأختلاف ومعاملات الأرتباط والأنحدار كما تناول موضوع مباديء نظرية الاحتمالات . أما الفصل الثامن الذي يبحث بالمصفوفات والمحددات فقد تمت إضافته ليتمكن الطالب من استخدامها في حل المعادلات الخطية. ومن الجدير بالذكر انه تم إضافة بند خاص معزز بالصور التوضيحية لاستخدام الحاسبة في إيجاد قيم النسب المثلثية واللوغاريتمات والاعداد المقابلة الى اللوغاريتمات وبذلك نكون قد سجلنا لكتابنا هذا السبق الاول حيث لم يسبق لكتاب منهجي في علم الرياضيات أن أستخدم مثل هذا الاسلوب المبتكر في إيصال المعلومة. وهنا لا بد من الإشارة إلى الوقت المخصص لكل فصل والذي تم الاتفاق على ان يكون كالاتي وبمعدل حصتين لكل أسبوع و ما مجموعه (25 أسبوعاً) .

الفصل الأول	أربعة أسابيع
الفصل الثاني	ثلاثة أسابيع
الفصل الثالث	أربعة أسابيع
الفصل الرابع	ثلاثة أسابيع
الفصل الخامس	ثلاثة أسابيع
الفصل السادس	أسبوعين
الفصل السابع	أسبوعين
الفصل الثامن	أربعة أسابيع

وختاماً نستشهد بالمقولة الشهيرة للكاتب الذي يقول ((إنني رأيت أنه لا يكتب أنسان كتاباً في يومه إلا قال في غده : لو غير هذا لكان أحسن ، ولو زيد كذا لكان يستحسن ، ولو قدم هذا لكان أفضل ، ولو ترك هذا لكان أجمل ، وهذا من أعظم العبر للإنسان ، وهو دليل على استيلاء النقص على جملة البشر)) . أملين من أخواننا المدرسين أن يوافقونا ملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق .

المؤلفون



((من أراد أن يختبر عقله فعليه بالرياضيات ...ومن أراد أن ينميه فعليه بالرياضيات ... ومن أراد أن يصقل ذكائه وموهبته فعليه بالرياضيات))

بعض المختصرات والرموز المستخدمة في الكتاب

1. $L.H.S = left\ hand\ side$: الطرف الايسر
2. $R.H.S = right\ hand\ side$: الطرف الايمن
3. $S.s = Solution\ set$: مجموعة الحل
4. $(x - axis)$: المحور الافقي
5. $(y - axis)$: المحور العمودي
6. \mathbb{R} : مجموعة الاعداد الحقيقية
7. \mathbb{Q} : مجموعة الاعداد النسبية
8. \mathbb{Z} : مجموعة الاعداد الصحيحة
9. \mathbb{N} : مجموعة الاعداد الطبيعية
10. \forall : لكل
11. \exists : يوجد على الاقل
12. \in : ينتمي
13. \ni : بحيث
14. $f(x)$: الدالة
15. Δx : التغير في قيمة x
16. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$: الغاية عندما التغير في قيمة x (أي Δx) صغير ويقترّب من الصفر
17. $\frac{dy}{dx}, y', f'(x)$: المشتقة الاولى
18. $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', f''(x)$: المشتقة الثانية
19. m : ميل المماس للمنحني

الصفحة	الموضوع
	الفصل الاول
	الاسس واللوغاريتمات
10	[1-1] الدالة الاسية
25	[1-2] الدالة اللوغاريتمية والقوانين الأساسية لها
	الفصل الثاني
	الغاية والإستمرارية
45	[2-1] غاية الدالة
46	[2-2] المبرهنات الأساسية للغاية
47	[2-3] جبر الغايات
52	[2-4] الإستمرارية
53	[2-5] إستمرارية الدالة عند نقطة معينة
	الفصل الثالث
	حساب التفاضل
59	[3-1] نبذة تاريخية
59	[3-2] علم التفاضل والتكامل
61	[3-3] تعريف المشتقة
63	[3-4] قواعد إيجاد المشتقة
69	[3-5] المشتقات من الرتب العليا
	الفصل الرابع
	المصفوفات والمحددات
74	[4-1] مقدمة
74	[4-2] مفاهيم المصفوفات
77	[4-3] تساوي مصفوفتين
79	[4-4] جبر المصفوفات
87	[4-5] المحددات
91	[4-6] حل المعادلات الخطية باستعمال المحددات

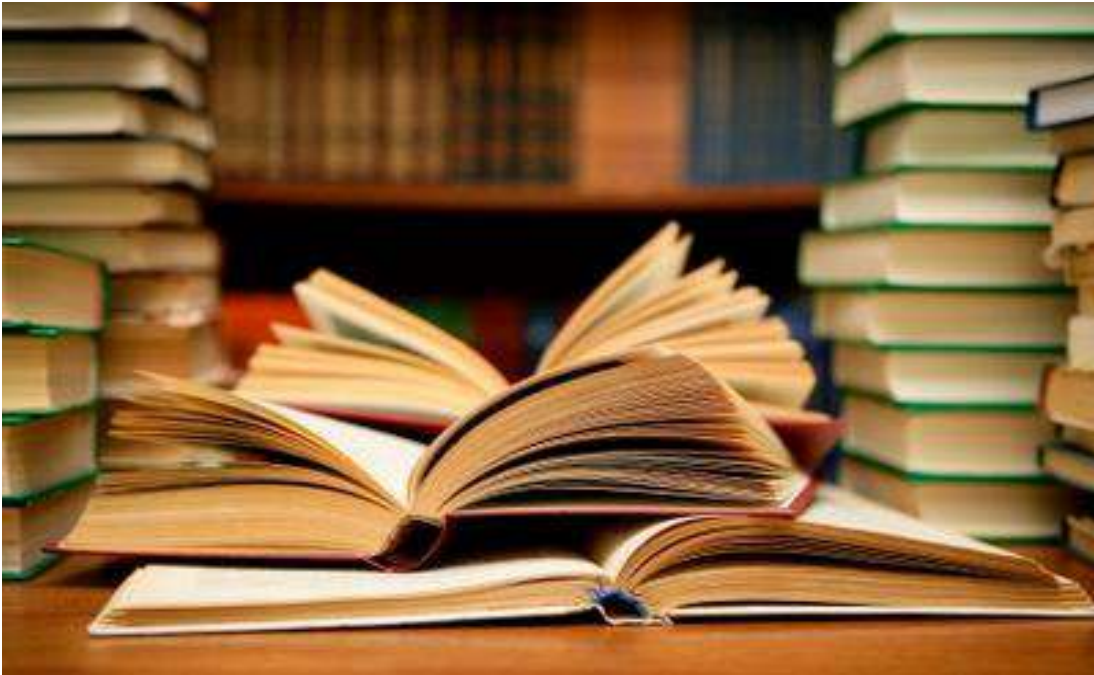
الفصل الخامس

علم الاحصاء- مقاييس النزعة المركزية

99	[5-1] أنواع الجداول
101	[5-2] جداول التوزيع التكراري.
110	[5-3] التمثيل البياني للمقاييس الاحصائية
124	[5-4] التشتت أو الاختلاف

الفصل الاول

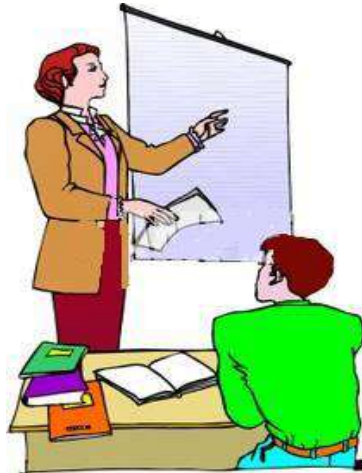
الأسس واللوائح والبيئات



الفصل الاول الأسس واللوغاريتمات

الاهداف السلوكية:

- ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا ان يكون قادراً على أن :-
1. يدرك ان مفهوم الأسس وجد للتعبير عن عملية الضرب المتكرر لعدد ما .
 2. يتقن قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة موجبة أو سالبة ويفهم معنى الأس الكسري.
 3. يستخرج مجموعة الحل للمعادلات الأسية .
 4. يميز الدالة الأسية ويستطيع تمثيلها بيانياً.
 5. يدرك الحاجة لمفهوم اللوغاريتم ويتمكن من التحول من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية او بالعكس بسهولة .
 6. يستطيع استخراج لوغاريتمات الأعداد لاي أساس .
 7. يستوعب أسلوب إيجاد اللوغاريتمات العشرية للأعداد التي تمثل قوى صحيحة للعدد 10 .
 8. يدرك الحاجة الى وجود اللوغاريتم الطبيعي (\ln) وهو لوغاريتم للأساس e) ويتمكن من أدراك أن له خواص اللوغاريتم الاعتيادي ذاتها .
 9. يستخرج مجموعة الحل لبعض المعادلات اللوغاريتمية .
 10. يميز الدالة اللوغاريتمية ويستطيع تمثيلها بيانياً .



الفصل الأول الأسس واللوغاريتمات

- [1-1] الدالة الأسية .
- [1-1-1] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة موجبة.
- [1-1-2] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة .
- [1-1-3] تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون أعداداً نسبية .
- [1-1-4] الدالة الأسية - تمثيلها بيانياً - خواصها .
- [1-1-5] المعادلات الأسية .
- [1-2] الدالة اللوغاريتمية والقوانين الأساسية لها.
- [1-2-1] الدالة اللوغاريتمية التي أساسها أعداد حقيقية .
- [1-2-2] أهم خواص اللوغاريتمات .
- [1-2-3] اللوغاريتمات العشرية .
- [1-2-4] اللوغاريتمات الطبيعية.



3.141592653589793238462643383		
279502884197169399375105820974944		
59260781640628620899862803482534211		
70879821480865132822066479938446095		
50982231745359408	128481117	
45028410	270193852	1105559144
622948	954930381	9644288109
75	665933446	128475 8482
	3378678116	5271201909
	145648586	9284603486
	1045432664	8213393807
	2602491412	7372458700
	66063155881	74881520920 962829
	25409171536	43678925903600113805
	3054882046652	1384146911941911609
	43305727036675	959195309216611738
	19326117931051	18548074462379962
	7495673518857	527248912270381
	8301194912	9833673662
	44065	66430

[1-1] الدالة الأسية

تمهيد

سنقدم في البند هذا خلاصة للتعريف والنظريات التي سبق وإن تعلمتها في المراحل السابقة حول الأسس حيث تعرفنا على مفهوم الأس عندما يكون عدداً صحيحاً موجباً وذلك على سبيل المراجعة التي سيبني عليها الفصل هذا حيث سنعالج كون الأسس أعداداً نسبية أو حقيقية .

الأسس :-

تعلمنا في دراستنا السابقة انه يمكننا التعبير عن الضرب المتكرر بطريقة مختصرة فمثلاً المقدار $3 \times 3 \times 3 \times 3$ يعبر عنه بالصيغة 3^4 فالعدد 4 يدل على عدد مرات ضرب العدد 3 في نفسه وتقرأ (3 أس 4) أو (القوة الرابعة للعدد 3) ويمكننا تعميم ذلك كما يلي :-

تعريف الأس :-

الى n من المرات $a^n = a \times a \times a \times a \times \dots$ $\forall n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$

ملاحظات :-

1. إذا كان a عدداً موجباً فإن a^n يكون عدداً موجباً في حالة كون الأس n فردياً أو زوجياً.
2. إذا كان a عدداً سالباً فإن a^n يكون :-
 - عدداً موجباً في حالة كون الأس n زوجياً .
 - عدداً سالباً في حالة كون الأس n فردياً .

مثال 1 :- جد ناتج ما يأتي :



1) $2^2 = 2 \times 2 = 4$

2) $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

3) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

4) $(-2)^6 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 64$

[1-1-1] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة موجبة

تعلمنا من دراستنا السابقة إن القوانين المدونة في أدناه تكون صائبة عندما تكون الأسس أعداداً صحيحة موجبة ،

أي إن: $\forall a, b \in \mathbb{R}, n, m \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0$

1. قانون ضرب الأسس: عند الضرب تجمع الأسس بشرط تساوي الأساسات

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

مثال 2:- جد ناتج ما يأتي:

1) $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$

2) $5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^1 = 5^{3+2+1} = 5^6$

3) $a^2 \cdot b^4 \cdot a^3 = a^{2+3} \cdot b^4 = a^5 \cdot b^4$

2. قانون قسمة الأسس: عند القسمة تطرح الأسس بشرط تساوي الأساسات

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \forall m > n \\ 1 & \forall m < n \\ 1 & , m = n \end{cases}$$

مثال 3:- جد ناتج ما يأتي:

1) $\frac{a^{17}}{a^3} = a^{17-3} = a^{14}$

2) $\frac{b^6}{b^{12}} = \frac{1}{b^{12-6}} = \frac{1}{b^6}$

3) $\frac{x^3}{x^3} = 1$

مثال 4:- أكتب المقدار الآتي بأبسط صورة :-
 $\frac{x^3 \cdot y^2 \cdot x^4}{x^2 \cdot y \cdot y^5}$

$$\frac{x^3 \cdot y^2 \cdot x^4}{x^2 \cdot y \cdot y^5} = \frac{x^7 \cdot y^2}{x^2 \cdot y^6} = \frac{x^5}{y^4}$$

الحل:

3. قانون رفع الأسس: عند الرفع تضرب الأسس

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

كما يمكننا الاستنتاج مما سبق أن :-

1. $(a^m)^n = (a^n)^m$, $\forall a \in \mathbb{R}; m, n \in \mathbb{N}$
2. $(a^m \cdot b^n)^c = a^{mc} \cdot b^{nc}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0; m, n, c \in \mathbb{N}$
3. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^c = \frac{a^{mc}}{b^{nc}}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0, b \neq 0; m, n, c \in \mathbb{N}$

مثال 5:- لاحظ أن $(7^2)^3 = 7^{(2) \cdot (3)} = 7^6 = 7^{(3) \cdot (2)} = 7^6$
وهكذا يكون $(7^2)^3 = (7^3)^2$

مثال 6:- أختصر المقدار الآتي بأبسط صورة:

$$\frac{(x^2)^3 y^4 z^5}{x^3 (y^3)^2 z^5}$$

الحل :-

$$\frac{(x^2)^3 y^4 z^5}{x^3 (y^3)^2 z^5} = \frac{x^6 \cdot y^4 \cdot z^5}{x^3 \cdot y^6 \cdot z^5} = \frac{x^{6-3} \cdot z^{5-5}}{y^{6-4}} = \frac{x^3 \cdot (1)}{y^2} = \frac{x^3}{y^2}$$

مثال 7:- أثبت أن $\frac{(81)^{n+1} \cdot (625)^n}{(9)^{2n} \cdot (27) \cdot (25)^{2n-1}} = 75$

الحل :-

$$L.H.S = \frac{(81)^{n+1} \cdot (625)^n}{(9)^{2n} \cdot (27) \cdot (25)^{2n-1}} = \frac{(3^4)^{n+1} \cdot (5^4)^n}{(3^2)^{2n} \cdot (3^3) \cdot (5^2)^{2n-1}}$$

$$= \frac{3^{4n+4} \cdot 5^{4n}}{3^{4n} \cdot 3^3 \cdot 5^{4n-2}} = (3)^{4n+4-4n-3} \cdot (5)^{4n-4n+2}$$

$$= (3)^1 \cdot (5)^2 = (3) \cdot (25) = 75 = R.H.S$$

4. قانون الأس الصفري:- اي عدد حقيقي (عدا الصفر) مرفوع لاس صفر يساوي 1

اذا كان $(a \neq 0) \in \mathbb{R}$:-
فان $a^0 = 1$:-

مثال 8:-

ما قيمة المقدار $(3)^0 \cdot (3)^5$ ؟

الحل :- $(3)^0 \cdot (3)^5 = 3^0 \cdot 3^5 = 1 \cdot 3^5 = 3^5 = 243$

5. قانون الأس الصحيح السالب

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ولتوضيح معنى الأس الصحيح السالب المعطى بالتعريف اعلاه لاحظ المثال الآتي :-

مثال 9 :-

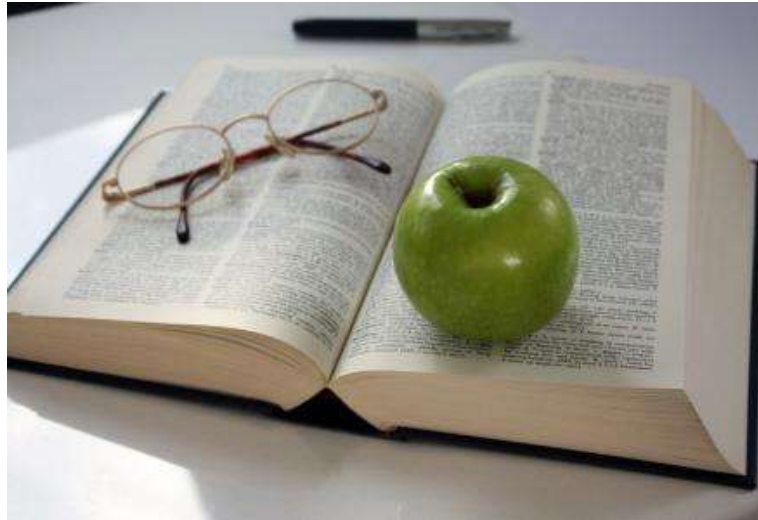
ما قيمة المقدار $(2)^{-3} (2)^3$ ؟
الحل :-

$$(2)^{-3} \cdot (2)^3 = 2^{-3} \cdot 2^3 = \frac{1}{2^3} \cdot 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = 1$$

مثال 10 :- بسط المقدار $\frac{(2)^4 \cdot (5)^2 \cdot (2)^{-3}}{(3)^{-2} \cdot (5)^{-4} \cdot (2)^2 \cdot (5)^3}$ الى أبسط صورة ممكنه :-

الحل :-

$$\begin{aligned} \frac{(2)^4 \cdot (5)^2 \cdot (2)^{-3}}{(3)^{-2} \cdot (5)^{-4} \cdot (2)^2 \cdot (5)^3} &= \frac{(2)^1 \cdot (5)^2}{(3)^{-2} (5)^{-1} \cdot (2)^2} \\ &= \frac{(5)^2 \cdot (5)^1 \cdot (3)^2}{(2)^2 \cdot (2)^{-1}} = \frac{(5)^3 \cdot (3)^2}{2^1} = \frac{1125}{2} \end{aligned}$$



تمارين (1-1)

1. أختصر المقادير الآتية بحيث تكون الأسس أعداداً صحيحة موجبة .



a) $\frac{(2) \cdot (2)^4 \cdot (2)^6}{(3)^2 \cdot (3)^3}$

b) $\frac{(2) \cdot (3^2 \cdot 2^2)}{(2)^8 \cdot (2)^7}$

c) $\frac{(-2)^5 \cdot (-5)^3}{(5)^2 \cdot (-2)^4}$

2. ضع كل من المقادير الآتية بأبسط صورة .



a) $\frac{a^2 \cdot b^3}{b^4} \cdot \frac{a^4 \cdot b^6}{b^5}, b \neq 0$

b) $\frac{(a^2 \cdot b^3)^4 \cdot (b \cdot a)^3}{(b^2 \cdot a)^2}, a, b \neq 0$

c) $\frac{(x+y)^2 \cdot (x+y)^3}{(x+y)}, x, y \neq 0$

3. أثبت أن :-



a) $\frac{(5)^{2n}}{(5)^{2n-1}} = 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{(3)^2 \cdot (3)^{3x}}{3^{2(x+1)}} = 3^x \quad \forall x \in \mathbb{N}$

[1-1-2] قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحة:

تعلمنا في البند [1-1-1] أن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ حيث m, n عدنان صحيحان موجبان والآن نحاول تعميم القانون هذا عندما يكون أحد الأسس سالباً أو كليهما سالباً (البرهان للاطلاع)، فإذا فرضنا أن أحد الأسين عدد صحيح سالب وليكن n عندئذ نفرض أن $n = -c$ حيث c عدد صحيح موجب وعليه يكون :-

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-c} = a^m \cdot \frac{1}{a^c}$$

$$a^m \cdot a^n = \frac{a^m}{a^c} = a^{m-c} = a^{m+(-c)} = a^{m+n} \quad \text{:- إذا كانت } c < m \text{ يكون}$$

$$a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{c-m}} = \frac{1}{a^{-(m-c)}} = a^{m-c} = a^{m+(-c)} = a^{m+n} \quad \text{:- إذا كانت } c > m \text{ يكون}$$

أما إذا كان كل من n, e عدداً صحيحاً سالباً فأنا سوف نفرض أن $n = -e, m = -c$ حيث ان كلاً من c, e عدد صحيح موجب . ويترتب على ذلك أن :-

$$a^m \cdot a^n = a^{-c} \cdot a^{-e} = \frac{1}{a^c} \cdot \frac{1}{a^e} = \frac{1}{a^{c+e}} = a^{-(c+e)} = a^{-c-e} = a^{(-c)+(-e)} = a^{m+n}$$

وفي حالة كون أحد الأسين صفرأً وليكن ($n=0$) يكون :-

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+n}$$

وبذلك يكون قانون الأسس في الضرب والذي كان صائباً للأسس الصحيحة الموجبة ، صائباً أيضاً للأسس الصحيحة السالبة والصفر. وبالتسلسل المنطقي ذاته الذي أتبعناه في أعلاه نستطيع إثبات صواب القوانين الأخرى في القسمة أو الرفع .

مثال 11:- أختصر المقدار الآتي $\frac{[(3)^{-5} \cdot (7)^2]^2}{[(3) \cdot (7)]^4}$ بحيث تكون الأسس أعداداً صحيحةً موجبةً .



الحل:-

$$\frac{[(3)^{-5} \cdot (7)^2]^2}{[(3) \cdot (7)]^4} = \frac{(3)^{-10} \cdot (7)^4}{(3)^4 \cdot (7)^4} = \frac{1}{(3)^{10} \cdot (3)^4} = \frac{1}{(3)^{14}}$$

مثال 12:- ضع المقدار الآتي بأبسط صورة



$$\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{x^3 \cdot y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3 \cdot y^4}{x \cdot y}\right)^5, \quad x, y \neq 0$$

الحل :-

$$\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{x^3 \cdot y^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^3 \cdot y^4}{x \cdot y}\right)^5 = \frac{x^4 \cdot y^6}{x^6 \cdot y^{10}} \cdot \frac{x^{15} \cdot y^{20}}{x^5 \cdot y^5} = \frac{1}{x^2 \cdot y^4} \cdot \frac{x^{10} \cdot y^{15}}{1} = x^8 \cdot y^{11}$$

[1-1-3] تعريف الأس الكسري - قوانين الأسس عندما تكون أعداداً نسبية

الأس الكسري :- إذا كان $n \in \mathbb{N}^+, n > 1, m \in \mathbb{Z}$ فإن

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

حيث $a > 0, a \in \mathbb{R}$

وبصورة أخرى مع مراعاة الشروط الواردة اعلاه $\frac{m}{n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$

مبرهنة :- إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عدداً نسبياً فإن $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

البرهان ((للاطلاع)) :-

نفرض أن $n = \frac{e}{f}, m = \frac{c}{d}$ حيث c, d, e, f أعداد صحيحة ، $d > 1, f > 1$ فيكون :-

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a^m)^n = \left(a^{\frac{c}{d}}\right)^{\frac{e}{f}} = \left[\left(a^{\frac{1}{d}}\right)^c\right]^{\frac{e}{f}} = \left[\left[\left(a^{\frac{1}{d}}\right)^c\right]^e\right]^{\frac{1}{f}} = \left[\left(a^{\frac{1}{d}}\right)^{\frac{1}{f}}\right]^{ce} = a^{\frac{ce}{df}} \\ &= a^{\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}} = a^{m \cdot n} = R.H.S \end{aligned}$$

مبرهنة :- إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً وكان كل من m, n عدداً نسبياً فإن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

البرهان ((للاطلاع)) :-

نفرض أن $n = \frac{e}{f}, m = \frac{c}{d}$ حيث c, d, e, f أعداد صحيحة ، $d > 1, f > 1$ فيكون :-

$$a^m = a^{\frac{c}{d}} = a^{\frac{cf}{df}}, \quad a^n = a^{\frac{e}{f}} = a^{\frac{de}{df}}$$

$$L.H.S = a^m \cdot a^n = a^{\frac{cf}{df}} \cdot a^{\frac{de}{df}} = \left(a^{\frac{1}{df}}\right)^{cf} \cdot \left(a^{\frac{1}{df}}\right)^{de} = \left(a^{\frac{1}{df}}\right)^{cf+de}$$

$$= \left(a\right)^{\frac{cf+de}{df}} = \left(a\right)^{\frac{cf}{df} + \frac{de}{df}} = \left(a\right)^{\frac{c}{d} + \frac{e}{f}} = a^{m+n} = R.H.S$$

نتيجة :- إذا كانت \mathbb{Q} مجموعة الأعداد النسبية وكانت $a \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{Q}$ فإن

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ملاحظة :- يتضح لنا من خلال المبرهنتين الأخيرتين أن قوانين الأسس التي استخدمناها عندما كانت الأسس أعداداً طبيعية أو صحيحة تبقى صائبة عندما نستخدم الأعداد النسبية كأسس .

مبرهنة :- ليكن كل من a, b عدداً حقيقياً موجباً $n > 1, n \in \mathbb{N}^+$ فإن :-

$$1) \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

$$2) \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$$

ملاحظة:- إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً فإن المبرهنة تكون صائبة عندما يكون a أو b سالباً

مثال 13 :- جد ناتج كل مما يأتي :



$$1. (\sqrt[4]{7})^5 = (7^{\frac{1}{4}})^5 = 7^{\frac{5}{4}}$$

$$2. (\sqrt{a^3 \cdot b^4})^3 = (a^{\frac{3}{2}} \cdot b^2)^3 = (a^{\frac{3}{2}} \cdot b^2)^3 = a^{\frac{3}{2} \cdot 3} \cdot b^{2 \cdot 3} = a^{\frac{9}{2}} \cdot b^6$$

$$3. \sqrt{50} = \sqrt{(25) \cdot (2)} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$4. \sqrt{\frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$5. \sqrt[3]{-0.001} = \sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-1}{10} = -0.1$$

$$6. \sqrt[3]{(125)^{-1}} \cdot \sqrt[4]{0.0016} = (125)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{16}{10000}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= [(5)^3]^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2^4}{10^4}\right)^{\frac{1}{4}} = (5)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$7. (\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{b})^{-4} \cdot \left(\frac{a^4 \cdot b^{\frac{8}{3}}}{c^{-4}}\right)^{\frac{3}{4}} = (a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}})^{-4} \cdot (a^4 \cdot b^{\frac{8}{3}} \cdot c^4)^{\frac{3}{4}}$$

$$= a^{-3} \cdot b^{-2} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^3 = c^3$$

$$8. \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{3 \cdot \frac{2}{3}}}{3^{3 \cdot \frac{2}{3}}} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$9. \sqrt{64 b^4 \cdot c^{-6}} = [(8)^2 \cdot b^4 \cdot c^{-6}]^{\frac{1}{2}} = (8^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (c^{-6})^{\frac{1}{2}} = 8b^2c^{-3} = \frac{8b^2}{c^3}$$

مثال 14:- بسط المقدار $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ ليكون مقامه عدداً نسبياً .



الحل :-

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$$

يسمى المقدار $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ في المثال السابق والذي ضربنا به كلاً من بسط الكسر ومقامه بـ(العامل المنسب) والذي يعرف بأنه الحدانية الجبرية التي تحول مقام الكسر الى عدد نسبي.

مثال 15:- بسط المقدار $\frac{3}{2\sqrt{5}+1}$ ليكون مقامه عدداً نسبياً .



الحل :-

$$\frac{3}{2\sqrt{5}+1} = \frac{3}{2\sqrt{5}+1} \cdot \frac{2\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}-1} = \frac{6\sqrt{5}-3}{(2\sqrt{5})^2 - (1)^2} = \frac{6\sqrt{5}-3}{(4).(5)-1} = \frac{6\sqrt{5}-3}{19}$$

مثال 16:- أثبت أن: $\left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = 8$



الحل:-

$$\begin{aligned} L.H.S &= \left(\frac{4^{n+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{(2).2^n}}{2\sqrt{2^{-n}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{(2^2)^{n+\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{(2)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}}}{(2).2^{\frac{-n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(2^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= (2^{3n})^{\frac{1}{n}} = 2^3 = 8 = R.H.S \end{aligned}$$

مثال 17:- أثبت أن: $\frac{9^{\frac{1}{2}(n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n - 3^{n-1}}} = 18$



الحل:-

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{9^{\frac{1}{2}(n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n - 3^{n-1}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{2}(n+1)} + 3^{n+1}}{\sqrt{(3^2)^n - 3^{n-1}}} = \frac{(3)^{(n+2)} + 3^{n+1}}{3^{\frac{2n}{2}} - 3^{n-1}} \\ &= \frac{(3)^{(n+2)} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}} = \frac{(3^n \cdot 3^2) + (3^n \cdot 3^1)}{3^n - (3^n \cdot 3^{-1})} = \frac{3^n(3^2+3^1)}{3^n(1-3^{-1})} = \frac{9+3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{12}{\frac{3-1}{3}} \\ &= \frac{12}{\frac{2}{3}} = (12) \cdot \frac{3}{2} = 18 = R.H.S \end{aligned}$$

تمارين (1-2)

1. جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :-



a) $\frac{\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{2}}$

b) $(\sqrt[7]{27})^{\frac{-7}{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

d) $2A^0 + (2A)^0 - 3$

2. بسط كلاً من المقادير الآتية ليكون الناتج بأسس موجبة :-



a) $\frac{5 \cdot (3)^{n-1} - 3^n}{3^{n+1} + (2) \cdot (3)^{n-1}}$

b) $\frac{(25)^n \cdot (10)^{n+1}}{(125)^n \cdot (4)^{\frac{n-2}{2}}}$

c) $\frac{x^3}{y^{-2}} \div \frac{x^{-2}}{y^3}, y \neq 0$

d) $x^2 \cdot y^2 (x^{-2} + y^{-2}), x, y \neq 0$

3. أثبت صحة المتطابقات الآتية :-



a) $\frac{2^{n-2} \cdot 4^{n+2}}{8^n} = 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\frac{25^{n+2} - 5^{2n+3}}{(4) \cdot 5^{2n}} = 5^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{(5) \cdot (5)^{2n} - 4 \cdot (25)^{n-\frac{1}{2}}}{(2) \cdot (5)^{2n+1} + (125)^{\frac{2n}{3}}} = \frac{21}{55}$

d) $\left(\left(\frac{4^{n+1} \cdot 2^{-n}}{4^{n(n-1)}} \right) \div \left(\frac{8^{n+1}}{4^{(n+1)(n-1)}} \right) \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

4. بسط المقادير الآتية ليكون مقامها عدداً نسبياً :-



a) $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} + \sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3} - 1}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

[1-1-4] الدالة الأسية - تمثيلها بيانياً - خواصها

أطلعت عزيزي الطالب في البنود السابقة على قوانين الأسس عندما تكون أعداداً صحيحةً أو نسبيةً . وفي البند هذا سوف نقبل القوانين السابقة للأسس عندما تكون أعداداً حقيقية دون الخوض في تفاصيل برهان ذلك

تعريف :-

إذا كان a عدداً حقيقياً موجباً لا يساوي الواحد فإن الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : f(x) = a^x \forall x \in \mathbb{R}$ تسمى ((الدالة الأسية)) وهي دالة من نوع التقابل ((أي انها دالة شاملة ومتباينة))

ويمكن إعادة صياغة التعريف أعلاه كما يلي :-

تعريف :-

تعرف الدالة الأسية $f_a(x)$ بانها تطبيق من \mathbb{R} الى \mathbb{R}^+ وقاعدة اقتران التطبيق هذا هي

$$f_a(x) = a^x : a \in \mathbb{R}^+ / \{1\} , x \in \mathbb{R}$$

ومن أمثلة الدالة الأسية ماياتي :-

1. $f_7(x) = 7^x$
2. $f_5(x) = 5^x$
3. $f_{\sqrt{7}}(x) = (\sqrt{7})^x$
4. $f_{\frac{3}{4}}(x) = (\frac{3}{4})^x$

مثال 18 :- ارسم منحنى الدالة الأسية $f_2(x)$ ومنه ارسم منحنى الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x)$.

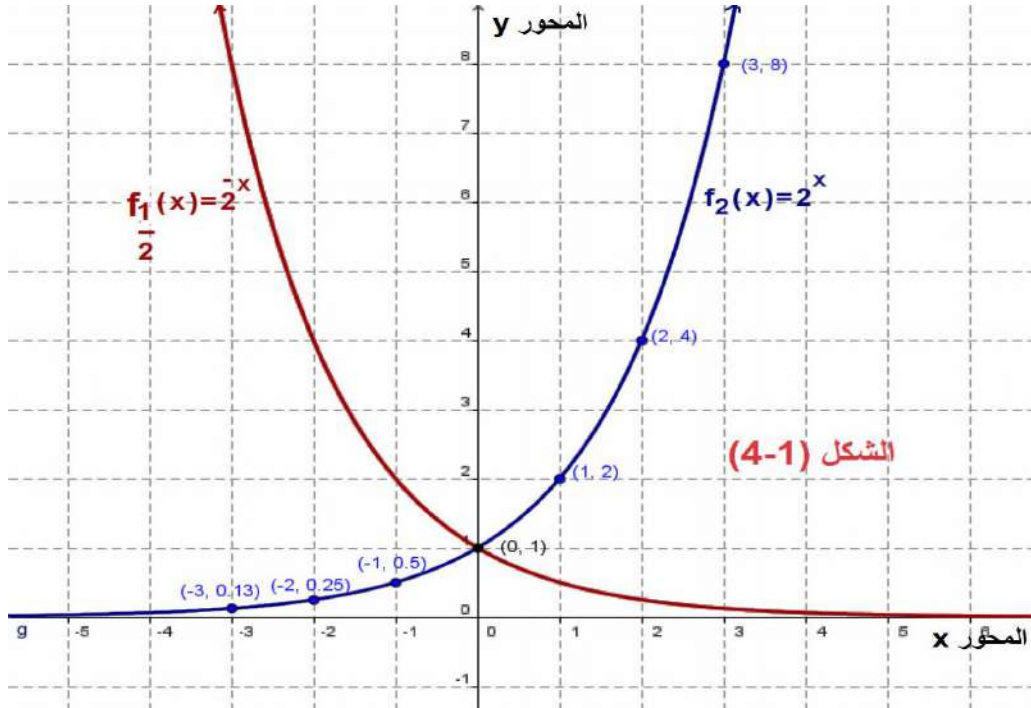
الحل :- حيث أن $f_2(x) = 2^x$ ، نقوم بتكوين جدول قيم تعويضية للدالة بهدف استخراج أزواج مرتبه تمثل بشكل نقاط على المستوي الاحداثي والتوصيل فيما بينها للحصول على جزء من التمثيل البياني للدالة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

أما بالنسبة للدالة $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ فإنه من الملاحظ أن الدالتين $f_2(x)$ ،

$f_{\frac{1}{2}}(x)$ تتناظر أحدهما الاخرى حول المحور y وبذلك نستطيع رسمها بالاعتماد على هذه الحقيقة وكما

في الشكل (1-4) في الصفحة اللاحقة :-



وبالمثل يمكن أن نتناول أية دالة حقيقية $f_a(x) = a^x$ حيث $(a \neq 1, a \in \mathbb{R}^+)$ وكما أسلفنا فإن الدالة هذه تسمى ((الدالة الأسية)) وهي تتمتع بخواص الأسس التي درسناها في البنود السابقة. أي إنه إذا كان $a > 1, m, n \in \mathbb{R}$ فإن :-

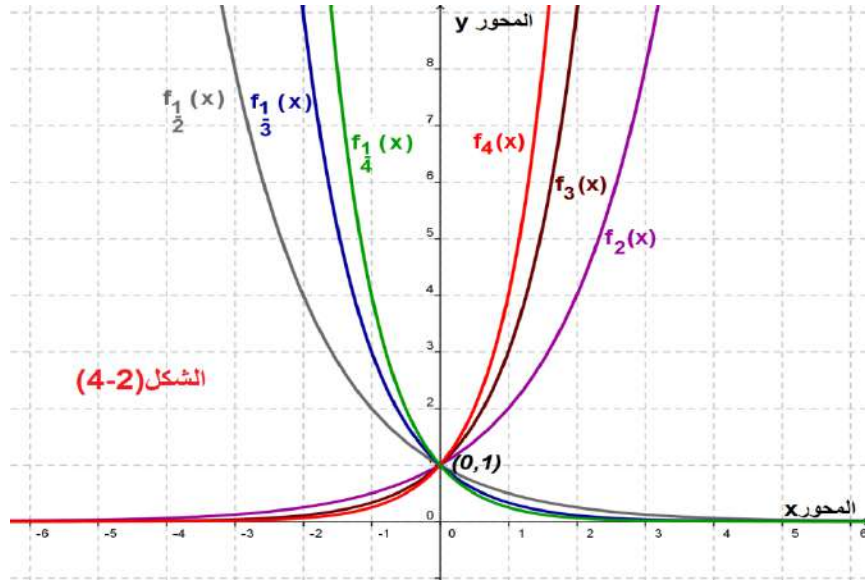
1. $f_a(m) \cdot f_a(n) = f_a(m+n)$
2. $\frac{f_a(m)}{f_a(n)} = f_a(m-n)$
3. $[f_a(m)]^n = f_a(m \cdot n)$

بعض خواص الدالة الأسية $f_a(x) = a^x$

إذا قمنا برسم منحنيات الدوال $f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x), \dots$ وكذلك الدوال $f_{\frac{1}{2}}(x), f_{\frac{1}{3}}(x), f_{\frac{1}{4}}(x), f_{\frac{1}{5}}(x), \dots$

فأننا سوف نجد مجموعتين من المنحنيات :-

1. دوال تزايدية عندما $a > 1$ حيث تتزايد قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .
 2. دوال تناقصية عندما $1 > a > 0$ حيث تتناقص قيم الدالة $f_a(x)$ كلما تزايدت قيمة x .
- وفي الشكل (4-2) في الصفحة اللاحقة المخطط البياني لبعض هذه المنحنيات (لاحظ ان الظاهر في الرسم هو جزء من المنحني وليس المنحني كله) ثلاثة منها يكون فيها $a > 1$ والثلاثة الأخرى فيها $1 > a > 0$ وقد أختارنا قيم a في المجموعة الثانية لتكون مقلوبات قيم a في المجموعة الأولى كما نلاحظ ان جميع المنحنيات تمر بالنقطة $(0,1)$.



نرى مما سبق إن :-

1. الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متباينة :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \rightarrow a^x \neq a^y$$

2. الدالة $f_{\frac{1}{2}}(x) = a^x$ دالة شاملة :

مجال f هو \mathbb{R} ومجالها المقابل هو \mathbb{R}^+ كما إن المدى هو $\{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$ أي إن المدى يساوي المجال المقابل .

3. الدالة $f_a(x) = a^x$ دالة متقابلة لأنها دالة شاملة ومتباينة .

[1-1-5] المعادلات الأسية

المعادلة الأسية هي المعادلة التي تحتوي على مجهول في الأس ، وطريقة حلها تعتمد على الحقيقتين الآتيتين :

1. إذا كان $a^x = a^y$ فإن $x = y$ حيث $a \neq 1$.

2. إذا كان $a^x = b^y$ فإن $x = y = 0$ حيث $a \neq b \neq 1$

مثال 19:- حل المعادلات الأسية الآتية :-

1) $125^x = 5^{x-2}$

2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

الحل:-

1) $125^x = 5^{x-2}$

$$[(5)^3]^x = 5^{x-2} \Rightarrow 5^{3x} = 5^{x-2} \Rightarrow 3x = x - 2 \Rightarrow 3x - x = -2$$

$$2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\therefore S.s = \{-1\}$$

2) $7^{x+2} = 3^{x+2}$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\therefore S.s = \{-2\}$$

مثال 20:- حل المعادلات الأسية الآتية :-



1) $16^x = \frac{1}{4}$ 2) $5^{x^2-x} = 25$ 3) $4^{2x-3} = 1$
4) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

الحل:-

1) $16^x = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} [(4)^2]^x &= (4)^{-1} \\ (4)^{2x} &= (4)^{-1} \\ 2x &= -1 \\ x &= \frac{-1}{2} \\ \Rightarrow S.s &= \left\{ \frac{-1}{2} \right\} \end{aligned}$$

2) $5^{x^2-x} = 25$

$$\begin{aligned} 5^{x^2-x} &= 5^2 \\ x^2 - x &= 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ x - 2 = 0 &\rightarrow x = 2 \\ x + 1 = 0 &\rightarrow x = -1 \\ \Rightarrow S.s &= \{-1, 2\} \end{aligned}$$

أما
أو

3) $4^{2x-3} = 1$

$$\begin{aligned} 4^{2x-3} &= 4^0 \\ 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \\ \Rightarrow S.s &= \left\{ \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

4) $2^{3x^2-12} = 3^{3x^2-12}$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 \\ 3x^2 &= 12 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \\ \Rightarrow S.s &= \{-2, +2\} \end{aligned}$$

تمارين (1-3)

1. جد مجموعة الحل في كل من المعادلات الآتية :-



a) $(0.01)^{-x} = 100$

b) $(0.1)^{x+1} = 10$

c) $x^{5x} = \sqrt{x}, x \neq 0$

d) $1 = y^{x^2-3x-4}$

e) $7^{x^2-2x+1} = 49^{x-1}$

f) $2^{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{16}$

g) $x^{\frac{3}{4}} = 27$

h) $10^x = \frac{10}{\sqrt{1000}}$

2. مثل الدالة الأسية $f_3(x) = 3^x$ بيانياً ومن المخطط البياني جد قيمة $3^{1.5}$ بصورة تقريبية ، وإذا علمت أن $3^x = 5$ جد قيمة x بصورة تقريبية .



[1-2] الدالة اللوغاريتمية والقوانين الأساسية لها

لقد عرفنا في موضوع الأسس أن $2^2 = 4$ ، $2^3 = 8$ ، $2^4 = 16$ وهكذا وبذلك يكون العدد الذي يوضع أساً للأساس 2 ليكون الناتج 4 هو العدد 2 وليكون الناتج 8 هو العدد 3 وليكون الناتج 16 هو العدد 4 كما اننا أوضحنا ان العدد 2 في الامثلة أعلاه يسمى ((الأساس)) بينما كل من الأعداد 2،3،4، تسمى ((الأسس)) أما الأعداد 4، 8، 16 فانها تسمى ((الناتج)).

فإذا اردنا ان نسأل ((ما هو العدد الذي نجعله أساً للعدد 5 ليكون الناتج 125 فان التسلسل المنطقي الذي سوف نتبعه في الحل هو كالاتي :-

$$5^x = 125 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$$

إن العدد (3) والذي يجعل أساً للأساس 5 لكي ينتج العدد 125 يطلق عليه أسم ((لوغاريتم)) العدد 125 للأساس 5 ويرمز له بالرمز $\log_5 125$ ، وهو يعبر رمزياً عن العبارة ((لوغاريتم العدد 125 للأساس 5 يساوي 3)):-

نلاحظ من ذلك ان الصيغة اللوغاريتمية هي صيغة عكسية للصيغة الأسية والعكس صحيح .

[1-2-1] الدالة اللوغاريتمية التي اساسها عدد حقيقي

قبل أن ندخل في تفاصيل الدالة اللوغاريتمية سنطلع أولاً على سلوك الدالة العكسية عن طريق ملاحظة المثال الآتي:-

لتكن $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{-1,1,3,5,7\}$ بحيث $f(x) = 2x - 3$ نلاحظ إن :-

$$f(1) = -1 \rightarrow (1, -1)$$

$$f(2) = 1 \rightarrow (2, 1)$$

$$f(3) = 3 \rightarrow (3, 3)$$

$$f(4) = 5 \rightarrow (4, 5)$$

$$f(5) = 7 \rightarrow (5, 7)$$

أي إن كل عنصر من عناصر مجال الدالة f يقترن بعنصر وحيد فقط من عناصر المجال المقابل للدالة كما إن بيان الدالة هو : $\{(1, -1), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 7)\}$

والآن لتكن $g: \{-1,1,3,5,7\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ بحيث $g(y) = \frac{y+3}{2}$ نلاحظ إن :-

$$g(-1) = 1 \rightarrow (-1, 1)$$

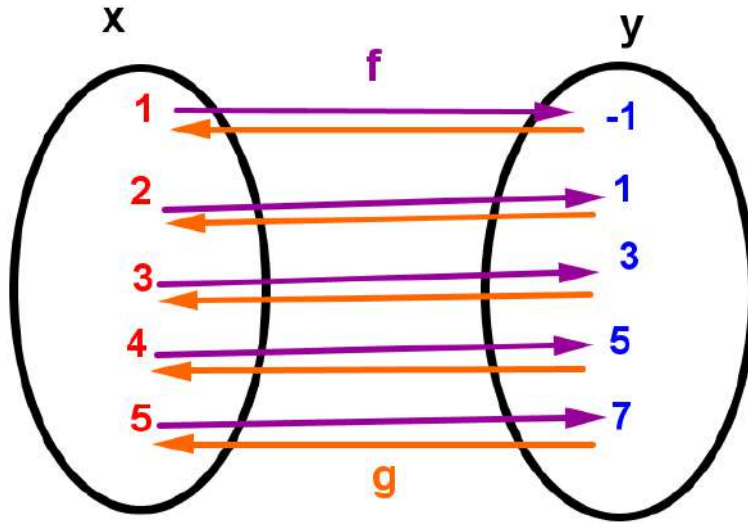
$$g(1) = 2 \rightarrow (1, 2)$$

$$g(3) = 3 \rightarrow (3, 3)$$

$$g(5) = 4 \rightarrow (5, 4)$$

$$g(7) = 5 \rightarrow (7, 5)$$

اي ان $g(y)$ دالة لانها تقرن كل عنصر من عناصر مجالها بعنصر وحيد من عناصر مجالها المقابل والمخطط السهمي في الصفحة اللاحقة يمثل الدالتين f, g



لاحظ إن ألدالة g تمحو أثر ألدالة f وتعيد الصورة الى وضعها الأصلي وتوصف ألدالة g بأنها دالة عكسية للـ f ، كما يرمز للـ g بالرمز f^{-1} . ((إن f^{-1} مجرد رمز ولا تعني $\frac{1}{f}$))

لقد تعلمنا في البند الخاص بالـ دالة الأسية إن $y = a^x$ حيث $a \in \mathbb{R}^+ / \{1\}$ ولو تمعنا في الأمثلة التي أوردناها في شرحنا لمفهوم اللوغاريتم لتوصلنا الى ان ألدالة اللوغاريتمية هي ألدالة العكسية للـ دالة الأسية ولذلك يمكننا صياغة التعريف الآتي للـ دالة اللوغاريتمية:-
 ألدالة العكسية للـ دالة الأسية التي صيغتها العامة $y = a^x$ تسمى ألدالة اللوغاريتمية وصيغتها العامة هي $x = \text{Log}_a y$ وتقرأ ((x يساوي لوغاريتم y للأساس a)) أي إن :-

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \text{Log}_a y$$

الصيغة اللوغاريتمية الصيغة الأسية

وبذلك يمكننا الانتقال من الصيغة الأسية الى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس وكما موضح بالأمثلة الآتية :-

مثال 21:- أكتب أالصيغة اللوغاريتمية المقابلة لكل من الصيغ الأسية الآتية:-

1) $16 = 4^2$

2) $13 = 13^1$

3) $1000000 = 10^6$

4) $0.00001 = 10^{-5}$

أالحل:-

1) $16 = 4^2 \Rightarrow \log_4 16 = 2$

2) $13 = 13^1 \Rightarrow \log_{13} 13 = 1$

3) $1000000 = 10^6 \Rightarrow \log_{10} 1000000 = 6$

4) $0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow \log_{10} 0.00001 = -5$

مثال 22:- أكتب الصيغة الأسية المقابلة لكل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية:-



- 1) $3 = \log_3 27$
- 2) $-3 = \log_5 \frac{1}{125}$
- 3) $1 = \log_{10} 10$

الحل:-

- 1) $3 = \log_3 27 \Rightarrow 27 = 3^3$
- 2) $-3 = \log_5 \frac{1}{125} \Rightarrow \frac{1}{125} = 5^{-3}$
- 3) $1 = \log_{10} 10 \Rightarrow 10 = 10^1$

ملاحظات :-

1. لوغاريتم العدد للأساس نفسه يساوي 1 أي $\log_x x = 1$
2. لوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس عدا الواحد يساوي صفراً أي $(\log_a 1 = 0, a \neq 1)$
3. أن مجال الدالة اللوغاريتمية هو \mathbb{R}^+ ويترتب على ذلك أن العدد (صفر) و ان أي عدد سالب ليس له لوغاريتم .

مثال 23:- جد قيمة المجهول في كل مما يأتي :-



- a) $\log_4 x = 3$
- b) $\log_x 64 = 6$
- c) $\log_{125} 25 = x$

الحل:-

- a) $x = 4^3 = 64$
- b) $64 = x^6 \Rightarrow 2^6 = x^6 \Rightarrow x = 2$
- c) $25 = 125^x \Rightarrow 5^2 = 5^{3x} \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

مثال 24:- جد ناتج ما يلي :-



- a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$
- b) $\log_{3\sqrt{3}} 81$
- c) $\log_{10} 0.001$

الحل:-

- a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow \sqrt[3]{2} = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{1}{3}} = 2^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
- b) $\log_{3\sqrt{3}} 81 = y \Rightarrow 81 = (\sqrt[3]{3})^y \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{1}{3}y}$
 $\Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{y}{3}} \Rightarrow 4 = \frac{y}{3} \Rightarrow y = 12$
- c) $\log_{10} 0.001 = z \Rightarrow 0.001 = 10^z \Rightarrow \frac{1}{1000} = 10^z \Rightarrow 10^{-3} = 10^z \Rightarrow z = -3$

مثال 25:- ما الأس الذي يرفع إليه العدد 5 ليكون الناتج $\frac{1}{625}$ ؟



الحل:-

$$\begin{aligned}\log_5 \frac{1}{625} &= x \\ \frac{1}{625} &= 5^x \\ \frac{1}{5^4} &= 5^x \\ 5^{-4} &= 5^x \\ x &= -4\end{aligned}$$

مثال 26:- ما العدد الذي لوغاريتمه للأساس (0.01) يساوي 2 ؟



الحل:- نفرض إن العدد = y

$$\begin{aligned}\log_{0.01} y &= 2 \\ y &= 0.01^2 \\ y &= 0.0001\end{aligned}$$

مثال 27:- جد لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$



الحل :- نفرض ان قيمة لوغاريتم العدد 16 للأساس $2\sqrt{2}$ يساوي x

$$\begin{aligned}\log_{2\sqrt{2}} 16 &= x \\ (2\sqrt{2})^x &= 16 \\ (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^x &= 2^4 \\ 2^{\frac{3}{2}x} &= 2^4 \\ \frac{3}{2}x &= 4 \\ 3x &= 8 \\ x &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

تمارين (1-4)

1. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة اللوغاريتمية :-



- a) $125 = 5^3$
- b) $4 = (\sqrt{2})^4$
- c) $0.000001 = 10^{-6}$
- d) $a^0 = 1$
- e) $2 = 8^{\frac{1}{3}}$

2. ضع كلاً مما يأتي بالصيغة الأسية :-



- a) $\log_{\sqrt{5}} 3125 = 10$
- b) $\log_a a = 1$
- c) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
- d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$
- e) $\log_{10} 0.001 = -3$

3. أحسب قيم اللوغاريتمات الآتية :-



- a) $\log_{10} 0.01$
- b) $\log_7 1$
- c) $\log_{10} 0.000001$
- d) $\log_3 3$

4. ما قيمة x في كل مما يلي :-



- a) $\log_x 0.001 = 1$
- b) $\log_{10}(2x + 3) = 1$
- c) $\log_x \frac{1}{100} = -2$
- d) $\log_2 64 = 10 - 2x$
- e) $\log_{0.001} x = 2$
- f) $\log_2 32 + \log_{25} 625 - \log_3 81 = x$

[1-2-2] أهم خواص اللوغاريتمات

مبرهنة (1) :- لوغاريتم حاصل ضرب عددين حقيقيين موجبين أو أكثر لأساس معلوم يساوي مجموع لوغاريتمي أو مجموع لوغاريتمات الأعداد هذه بالنسبة للأساس نفسه وبالعكس

$$\log_a(x \cdot y \cdot z \dots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots \quad \text{أي أن :-}$$

البرهان ((للاطلاع)) :- سنبرهن لحاصل ضرب عددين فقط

ليكن كل من x, y عدداً حقيقياً موجباً ولتكن $a \neq 1$ فإن المطلوب هو ان نبرهن :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

نفرض أن :-

$$\log_a x = n \Leftrightarrow x = a^n$$

وأن :-

$$\log_a y = m \Leftrightarrow y = a^m$$

وبأستخدام قانون الضرب في الأسس نحصل على :-

$$x \cdot y = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\Rightarrow \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

وبالطريقة ذاتها نستطيع البرهنة لحاصل ضرب أكثر من عددين .

مثال 28 :-

a) $\log_2[(5) \cdot (7)] = \log_2 5 + \log_2 7$

b) $\log_{\sqrt{2}}[(3) \cdot (11)] = \log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} 11$

c) $\log_7 30 = \log_7[(2) \cdot (3) \cdot (5)] = \log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 5$

مثال 29 :- أثبت أن :-

a) $\log_{10} \frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{1}{8} = 0$

b) $\log_a \frac{ax}{y} + \log_a \frac{y}{z} + \log_a \frac{z}{x} = 1$

الحل :-

a) $L.H.S = \log_{10} \frac{8}{3} + \log_{10} 3 + \log_{10} \frac{1}{8} = \log_{10} \left(\frac{8}{3} \cdot (3) \cdot \frac{1}{8} \right)$
 $= \log_{10} 1 = 0 = R.H.S$

b) $L.H.S = \log_a \frac{ax}{y} + \log_a \frac{y}{z} + \log_a \frac{z}{x} = \log_a \left(\frac{ax}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} \right)$
 $= \log_a a = 1 = R.H.S$

مبرهنة (2) :- لوغاريتم حاصل قسمة عددين حقيقيين موجبين لأساس معلوم يساوي لوغاريتم البسط مطروحاً منه لوغاريتم المقام بالنسبة للأساس نفسه وبالعكس أي إن :-

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

البرهان ((للاطلاع)):-

ليكن كل من x, y عدداً حقيقياً موجباً ولتكن $a \neq 1, y \neq 0$

نفرض أن :-

$$\log_a x = n \Leftrightarrow x = a^n$$

وأن :-

$$\log_a y = m \Leftrightarrow y = a^m$$

وباستخدام قانون القسمة في الأسس نحصل على :-

$$\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = a^{n-m} = \log_a x - \log_a y$$

مثال 30:- نوضح في المثال كيفية تطبيق مبرهنة (2)

$$a) \log_3 \frac{x}{5} = \log_3 x - \log_3 5$$

$$b) \log_5 \frac{6}{11} = \log_5 6 - \log_5 11 = \log_5 [(2) \cdot (3)] - \log_5 11 \\ = \log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 11$$

مثال 31:- أثبت أن :-

$$a) \log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16} = \log_{10} 3$$

$$b) \log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12 = 0$$

الحل:-

$$a) L.H.S = \log_{10} \frac{27}{32} + \log_{10} \frac{10}{3} - \log_{10} \frac{15}{16}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \div \frac{15}{16} \right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{27}{32} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{16}{15} \right) = \log_{10} 3 = R.H.S$$

$$b) L.H.S = \log_a \frac{6}{5} + \log_a \frac{5}{66} - \log_a \frac{132}{121} + \log_a 12$$

$$= \log_a \frac{\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{66} \cdot 12}{\frac{132}{121}} = \log_a \left(\frac{12}{11} \cdot \frac{121}{132} \right) = \log_a 1 = 0 = R.H.S$$

مثال 32:- أختصر المقدار الآتي:-

$$\log_2 \left(\frac{16}{15}\right)^2 + \log_2 \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \log_2 \frac{80}{9}$$

الحل:-

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{16}{15}\right)^2 + \log_2 \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \log_2 \frac{80}{9} &= \log_2 \left[\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \div \frac{80}{9} \right] \\ &= \log_2 \left[\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{9}{80} \right] = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

نتيجة:- $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$ أي إن :-

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

مثال 33: إذا كان $\log_{10} 5 = +0.699$ فإن

$$\log_{10} \frac{1}{5} = -\log_{10} 5 = -0.699$$

مبرهنة (3) :- لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب مرفوع لأس معين لأساس معلوم يساوي حاصل ضرب ذلك الأس في لوغاريتم العدد وللأساس نفسه .

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

البرهان:- ((للاطلاع)) ليكن x أي عدد حقيقي موجب ، n عدد حقيقي ، $a > 0$ ، $a \neq 1$ فإن :-

$$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \dots \text{ (إلى } n \text{ من المرات)}$$

$$\log_a x^n = \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \dots \text{ (إلى } n \text{ من المرات)})$$

وباستخدام قانون الضرب في اللوغاريتمات نحصل على :-

$$\log_a x^n = \log_a x + \log_a x + \log_a x \dots \text{ (إلى } n \text{ من المرات)}$$

$$\therefore \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

نتيجة:- لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب لأساس معلوم يساوي لوغاريتم العدد لأي أساس آخر مقسوماً على لوغاريتم الأساس الأصلي للأساس الجديد.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad b \neq 1 \quad \text{أي أن :-}$$

البرهان :- ((للاطلاع)) نفرض إن :- $\log_a x = n \Leftrightarrow x = a^n$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس b نحصل على :-

$$\log_b x = \log_b a^n$$

$$\log_b x = n \cdot \log_b a$$

$$n = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

وبتعويض قيمة n نحصل على :-

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

مثال 34:-

لاحظ اسلوب التبسيط المستخدم في كل مما يأتي :

a) $\log_5 \sqrt{7} = \log_5 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_5 7$

b) $\log_7 5 = \frac{\log_b 5}{\log_b 7} \quad (b \neq 1)$

c) $\log_4 5^{-3} = -3 \log_4 5$

مثال 35:-

أختصر المقدار الآتي : $\log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 3 \cdot \log_3 5$

الحل:-

$$\log_5 7 \cdot \log_7 11 \cdot \log_{11} 3 \cdot \log_3 5 = \frac{\log_b 7}{\log_b 5} \cdot \frac{\log_b 11}{\log_b 7} \cdot \frac{\log_b 3}{\log_b 11} \cdot \frac{\log_b 5}{\log_b 3} = 1$$

مثال 36:-

برهن إن : $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$

الحل :-

$$\begin{aligned} L.H.S &= \log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \frac{\log_v a}{\log_v b} \cdot \frac{\log_v b}{\log_v c} \cdot \frac{\log_v c}{\log_v d}, v \neq 1 \\ &= \frac{\log_v a}{\log_v d} = \log_d a = R.H.S \end{aligned}$$

ملاحظة:- إذا تساوى لوغاريتم عددين للأساس نفسه فإن العددين متساويان ، أي:-

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

مثال 37:-

حل المعادلة الآتية : $\log_5 (2x + 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 7$

الحل:- في المثال هذا لم تعط مجموعة التعويض ولذلك يقتضي الامر إيجادها أولاً وكما يلي :-

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow \{x: x > \frac{-1}{2}\}$$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow \{x: x > 2\}$$

ولذلك فإن مجموعة التعويض للمعادلة اللوغاريتمية ستكون :-

$$\{x: x > \frac{-1}{2}\} \cap \{x: x > 2\} = \{x: x > 2\}$$

والان نعاود حل المعادلة :-

$$\log_5 (2x + 1) + \log_5 (x - 2) = \log_5 7$$

$$\log_5 (2x + 1) \cdot (x - 2) = \log_5 7$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 7 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$(2x + 3)(x - 3) = 0$$

أما :-

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2} \notin \{x: x > 2\} \text{ يهمل}$$

أو :-

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in \{x: x > 2\}$$
$$\therefore S.s = \{3\}$$

مثال 38:- حل المعادلة الآتية:-



$$\log_{10}(3x - 7) + \log_{10}(3x + 1) = 1 + \log_{10} 2$$

الحل :- قبل أن نبدأ بحل المعادلة لا بد لنا أن نلاحظ الشرطين الآتيين :-

$$3x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$$

$$3x + 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{3}$$

أي أن مجموعة التعويض للمعادلة هي :-

$$\{x: x > \frac{7}{3}\} \cap \{x: x > \frac{-1}{3}\} = \{x > \frac{7}{3}\}$$

$$\log_{10}(3x - 7) + \log_{10}(3x + 1) = \log_{10} 10 + \log_{10} 2$$

$$\log_{10}[(3x - 7)(3x + 1)] = \log_{10}(10) \cdot (2)$$

$$\log_{10}(9x^2 - 18x - 7) = \log_{10} 20$$

$$9x^2 - 18x - 7 = 20$$

$$9x^2 - 18x - 27 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

أما :-

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in \{x > \frac{7}{3}\}$$

أو :-

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin \{x > \frac{7}{3}\} \text{ يهمل}$$

$$\therefore S.s = \{3\}$$

تمارين (1-5)

1. اختصر كلاً من المقادير الآتية:-

a) $\log_{10} \frac{5}{16} - \log_{10} \frac{8}{27} + \log_{10} \frac{32}{9}$

b) $\log_5 15 + \log_5 75 - \log_5 9$

c) $\log_{10}(x-9) - \log_{10}(x-3) + \log_{10} \frac{x-3}{x+3}$

d) $\frac{\log_{10} \sqrt{25} + \log_{10} \sqrt{27} - \log_{10} \sqrt{8}}{\log_{10} 15 - \log_{10} 2}$

2. جد قيمة المجهول في كل من المعادلات اللوغاريتمية الآتية:-

a) $\log_{10} \frac{55}{6} - \log_{10} x = \log_{10} \frac{11}{2} + 1$

b) $\log_{10} x + \log_{10} x^2 + \log_{10} x^3 = 12$

c) $\log_3 81 = 7 - 3y$

d) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}}(x-1) = 2$

3. أثبت صحة المتطابقات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10} \frac{9}{8} - \log_{10} \frac{18}{40} + \log_{10} \frac{72}{18} = 1$

b) $\log_{10} 0.1 + \log_{10} 18 - \log_{10} 6 - \log_{10} 3 = -1$

c) $\log_{10} 3 + \log_{10} 270 - 2 \log_{10} 9 = 1$

d) $\log_b 30 - \log_b 310 - \log_b 31 + \log_b 961 - \log_b 3 = 0, b \neq 1$

4. حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :-

a) $\log_{10}(3x+1) + \log_{10}(3x-7) - \log_{10} 2 = 1$

b) $\log_a(10-y) + \log_a(y+2) = \log_a 11, y \in \{10 > y > 2\}$

c) $\log_2(x+14) - \log_2(x-5) = 1$

d) $\log_5(n+1) + \log_5(2n-1) = 1$

5. إذا علمت ان $\log_{10} 2 = 0.3010$ ، $\log_{10} 3 = 0.4771$ فاحسب قيمة كل مما يلي

a) $\log_{10} 0.3$

b) $\log_{10} 60$

c) $\log_{10} \frac{64}{27}$

d) $\log_{10} \frac{81}{\sqrt{8}}$

[1-2-3] اللوغاريتمات العشرية (لوغاريتمات الأعداد للأساس 10)

اللوغاريتمات العشرية هي اللوغاريتمات التي يكون أساسها العدد 10 ولأنها تستخدم كثيراً في الحسابات العلمية لذا أتفق علماء الرياضيات على عدم كتابة الأساس 10 عند أستعمالها ، فمثلاً $\log 7$ يقصد بها $\log_{10} 7$.

لاحظ الصيغتين الأسية واللوغاريتمية الآتية والتي تبين لنا لوغاريتمات القوى الصحيحة للعدد 10

$$10000 = 10^4 \Leftrightarrow \log 10000 = 4$$

$$1000 = 10^3 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$$

$$100 = 10^2 \Leftrightarrow \log 100 = 2$$

$$10 = 10^1 \Leftrightarrow \log 10 = 1$$

$$1 = 10^0 \Leftrightarrow \log 1 = 0$$

$$0.1 = 10^{-1} \Leftrightarrow \log 0.1 = -1$$

$$0.01 = 10^{-2} \Leftrightarrow \log 0.01 = -2$$

$$0.001 = 10^{-3} \Leftrightarrow \log 0.001 = -3$$

وهكذا.....

مما سبق نستنتج ما يلي :-

1. لوغاريتمات القوى الصحيحة للعدد 10 هي أعداد صحيحة (موجبة) إذا كانت القوى أكبر من الواحد و(سالبة) إذا كانت القوى أصغر من الواحد .
2. الدالة $y = \log x$ (وهي تقابل من \mathbb{R} الى \mathbb{R}^+) وهي دالة متزايدة ونقصد بذلك أن قيمة الدالة $\log x$ تتزايد مع أزدیاد قيمة x ويترتب على ذلك ان لوغاريتم العدد يزداد بأزدیاد العدد ويصغر بصغره .
3. إذا كانت $x \in \{x: x \leq 0\}$ فإن $\log x$ تكون غير معرفة . (أي ان العدد السالب والصفر ليس لهما لوغاريتم) .
4. إذا كانت $x \in (0,1)$ فإن $\log x \in \{y: y < 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون سالبة) .
5. عندما $x = 0$ فإن $\log x = -\infty$
6. إذا كانت $x \in \{x: x > 1\}$ فإن $\log x \in \{y: y > 0\}$ (أي أن اللوغاريتمات تكون موجبة) .

[1-2-4] اللوغاريتمات الطبيعية

تعرفنا في البند السابق على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الأساس 10. والآن سنتعرف على اللوغاريتمات التي أساسها العدد الذي يرمز له بالرمز (e) والذي قيمته (2.71828) والذي يسمى العدد النيبيري.

معلومات إثرائية :-

سمي العدد e بالعدد النيبيري نسبة الى ناير ، وهو لورد اسكتلندي ، لم يكن مكتشفه ، بل ان مكتشفه بستاني كان يعمل عند اللورد ناير ، فقد كان ولع ناير بالهندسة يدفعه ليطلب طلبات غريبة من البستاني ، فتارة يقول له أزرع لي حديقة على شكل مستطيل ، وتارة اخرى على شكل مثلث ، ويعطيه بذوراً قليلة لا تناسب المساحة المطلوب زراعتها ، حتى أنه بالغ في طلباته لدرجة ابتكار أشكال هندسية غير معروفة في ذلك الوقت ، مما دفع البستاني للإطلاع والقراءة الهندسية ، وخلال المعاناة هذه استطاع البستاني وبتوجيهات ناير الغريبة زراعة حديقة تأخذ شكلاً أقرب إلى المثلث ولكن أحد الأضلاع على شكل قطع أو مساحة تحت منحنى دالة أسية ، وعند محاولة إيجاد المساحة تمكن من الوصول إلى هذا العدد e ، ولقد اعطي الرمز e للعدد النيبيري نسبة إلى الكلمة ((Ecosse)) والتي تعني (اسكتلندا) ، وهناك من يعتقد أن اختيار الحرف e لهذا الثابت لكونه اول حرف من كلمة الأس ((exponential)) وهناك من يشير الى احتمال أن يكون الرياضي أويلر ((Euler)) قد اختار هذا الحرف لأنه الحرف الأول من اسمه .
هناك علاقات رئيسة تستخدم لتعريف e وهذه التعاريف متكافئة فيما بينها، أي إن كلاً منها يصلح لتعريف e ومنها

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad , \quad \int_1^e \frac{dx}{x} = 1$$

كانت هناك إشارات الى العدد e في أوراق جون نايبير حول اللوغاريتمات ، وأول من أشار إلى هذا الثابت هو جاكوب برنولي .. وقد استخدمه لاحقاً ليبنز ، واستخدمه بعد ذلك أويلر . كما أن العالم جاكوب برنولي توصل إلى العدد هذا عند قيامه بحساب الفائدة المركبة (Compound Interest). فلقد قام برنولي بحساب الفائدة مفترضاً إن الفائدة المصرفية %100 سنوياً والمبلغ الأصلي دولاراً واحداً و إن الفائدة تضاف شهرياً وتوصل الى انه سيحصل على 2.613 دولار تقريباً في نهاية السنة ، وإذا كانت الفائدة تضاف يومياً فإنه سيحصل على 2.715 دولار تقريباً في نهاية السنة .
وقد عمم برنولي ما سبق بأنه لو كانت الفائدة بمقدار r في السنة ، وانها تضاف إلى الحساب n مرة في السنة ، فإن المبلغ في نهاية السنة سيكون : $x_n = x \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ وإن هذه المتتالية تتقارب إلى عدد بعينه ... وإذا كانت الفائدة تضاف بشكل مستمر (في كل لحظة) فإننا سنحصل على المقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$... والذي عندما نبسطه سوف نحصل على :-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = 2.718281828459045$$

(لخمس عشرة مرتبة بعد الفارزة) والذي نرمز له بالرمز e .

$$\therefore e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong 2.718281828459045$$

ملاحظة:- تسمى اللوغاريتمات بدلالة الأساس (e) باللوغاريتمات الطبيعية ولها خواص اللوغاريتمات العشرية ذاتها ، وهي تظهر في عدة مجالات وتطبيقات علمية متعددة قد تتعرف عليها في دراستك المستقبلية ،

يعرف اللوغاريتم الطبيعي للعدد y بالصيغة $\ln y$ لتمييزه عن اللوغاريتم الاعتيادي (العشري) ($\log y$) أما الرمز المختصر (\ln) فهو مأخوذ من كلمة (natural) والتي تعني (طبيعي) .
ومن تعريف الدالة اللوغاريتمية لو أستبدلنا الأساس a بالأساس e فأننا سوف نحصل على :-

$$x = \ln y \Leftrightarrow y = e^x$$

نتيجة (1) :-

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln e^x = x$$

البرهان :-

$$L.H.S = \ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x = R.H.S$$

نتيجة (2) :-

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} ,$$

$$a \neq 1 , a > 0$$

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$$

البرهان :- ليكن

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على :-

$$\ln x = \ln a^y \Rightarrow \ln x = y \cdot \ln a$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\therefore \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15}$$

جد قيمة

مثال 39:-



الحل:-

$$\frac{1}{\log_3 15} + \frac{1}{\log_5 15} = \frac{\ln 3}{\ln 15} + \frac{\ln 5}{\ln 15} = \frac{\ln 3 + \ln 5}{\ln 15} = \frac{\ln 15}{\ln 15} = 1$$

تمارين (1-6)

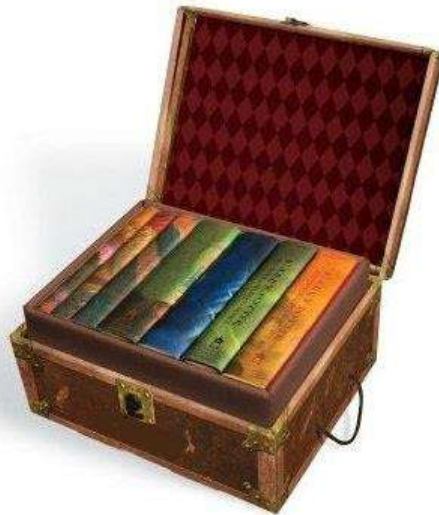
1. أثبت أن :-



a) $\frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc} = 1$

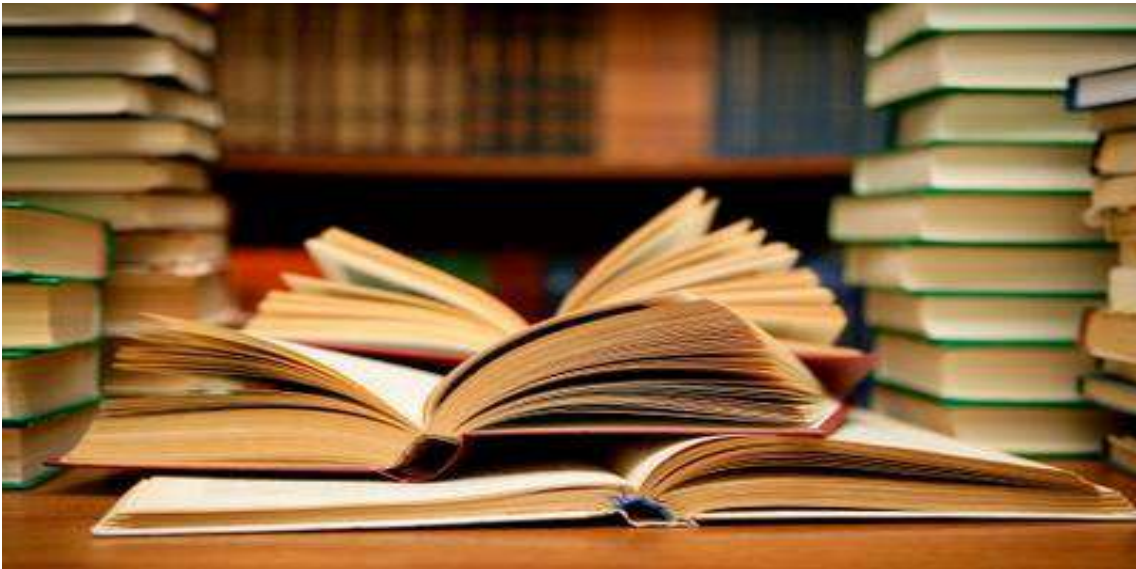
b) $\log_{10}\left(\frac{40}{9}\right) + 2(2 \log_{10} 5 + \log_{10} 6) = 5$

2. إذا كان : $b = \log_a c$, $a = \log_c b$ أثبت أن $\log_b a = \frac{1}{ab}$



الفصل الثاني

الغاية والأستمرارية



الفصل الثاني

الغاية والاستمرارية

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

- 1- يتعرف على مفهوم الغاية .
- 2- يتقن المبرهنات الأساسية للغايات .
- 3- يتعرف على مفاهيم جبر الغايات ويتمكن من تطبيقها .
- 4- يتعرف على مفهوم الدالة المستمرة .
- 5- يتمكن من تحديد استمرارية الدالة عند نقطة ما .



الفصل الثاني الغاية والاستمرارية

- [2-1] غاية الدالة.
- [2-2] المبرهنات الاساسية للغاية.
- [2-3] جبر الغايات.
- [2-4] الاستمرارية.
- [2-5] استمرارية الدالة عند نقطة معينة.



نلاحظ من الجدول السابق انه كلما إقتربت x من الصفر من جهة اليسار (أصغر من صفر) فإن $f(x)$ تزداد قيمتها العددية ولا تقترب من عدد معين وكذلك كلما إقتربت x من الصفر من جهة اليمين (أكبر من صفر) فإن $f(x)$ تزداد قيمتها ولا تقترب من عدد معين . ويعبر عن ذلك بالقول إنه لا توجد غاية للدالة عندما تقترب x من الصفر أو إن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير معرفة.

ملاحظات :-

1. غاية الدالة هي عملية إقتراب وليس مساواة ، أي ان الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة معينة ولتكن L عندما تقترب x من قيمة معينة ولتكن a وبالرموز نكتب

$$x \rightarrow a \text{ عندما } f(x) \rightarrow L$$

2. لكي تكون غاية الدالة $f(x)$ معرفة عندما تقترب x من قيمة معينة ولتكن a فإن الأمر يقتضي أن تكون غاية الدالة معرفة عندما تقترب x من a من جهة اليسار ($x \rightarrow a^-$) وأن تكون معرفة أيضاً عندما تقترب x من a من جهة اليمين ($x \rightarrow a^+$) وأن تكون الغايتان متساويتين ، ونعبر عن ذلك رياضياً بالرموز كما يأتي :-

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \text{ (معرفة) , } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2 \text{ (معرفة)}$$

فإذا كانت $L_1 = L_2 = L$ فإن للدالة $f(x)$ غاية ولتكن L حيث $L_1 = L_2 = L$ عندما تقترب x من a ونكتب عندئذ :-

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

والتي تقرأ (غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \rightarrow a$ تساوي L) .

[2-2] المبرهنات الاساسية للغاية

إن الاسلوب السابق لتعيين الغاية أسلوب مطول ولذلك سوف نتناول بعض المبرهنات التي تسهل علينا إيجاد الغاية لدالة معينة عند عدد معين دون الخوض في براهين المبرهنات هذه .

مبرهنة 1 (وحدانية الغاية) : غاية الدالة عند عدد معين (إن وجدت) فأنها وحيدة أي انه إذا كانت كل من

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \text{ , } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

$$L_1 = L_2$$

موجودة فإن :-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 12 & \forall x < 1 \\ 14x - 1 & \forall x \geq 1 \end{cases} \text{ لتكن مثال 2 :-}$$



إن إيجاد غاية الدالة هذه عندما $x \rightarrow 1$ (إن وجدت) يقتضي النظر الى تعريف الدالة والتي يبدو أن لها تعريفين الاول عندما $x < 1$ والثاني عندما $x \geq 1$ ويترتب على ذلك (حسب مبرهنة وحدانية الغاية) أن تكون الغاية معرفة عند الاقتراب من العدد (1) من جهة اليسار ومن جهة اليمين وأن تكونا متساويتين.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (14x - 1) = 14(1) - 1 = 13 = L_1$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 12) = 1^2 + 12 = 13 = L_2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 13$$

مثال 3:- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \forall x \geq 2 \\ 5x - 2 & \forall x < 2 \end{cases}$ ، أبحث إمكانية وجود الغاية

عندما $x \rightarrow 2$

الحل:- $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x^2 + 1) = 2(2)^2 + 1 = 9 = L_1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (5x - 2) = 5(2) - 2 = 8 = L_2$

$\therefore L_1 \neq L_2$

اي إنه ليس للدالة غاية عندما $x \rightarrow 2$ (لعدم وحدانية الغاية) .

مبرهنة 2: غاية الدالة الثابتة عند عدد معين تساوي الثابت نفسه أي :-

إذا كانت $f(x) = C$ حيث $C \in \mathbb{R}$ فإن

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C$

مثال 4:-

1) $\lim_{x \rightarrow a} 5 = 5$

2) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{3} = \sqrt{3}$

3) $\lim_{x \rightarrow a} (-2) = -2$

مبرهنة 3: غاية دالة كثيرة الحدود عند عدد معين تساوي صورة ذلك العدد تحت تأثير قاعدة أقتران

تلك الدالة أي إنه إذا كانت $f(x)$ قاعدة إقتران لدالة كثيرة الحدود فإن

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

مثال 5:- لتكن $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ دالة كثيرة الحدود ، جد :- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

الحل:-

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 4x^2 + 5x - 1)$
 $= (-2)^3 - 4(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -35$

[2-3] جبر الغايات:-

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

إذا كانت

فإن:-

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$

أي إن غاية (مجموع) أو (فرق بين) دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي (مجموع) أو (الفرق بين) غايتي الدالتين عند ذلك العدد.

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

أي ان غاية حاصل ضرب دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي حاصل ضرب غايتي الدالتين عند ذلك العدد.

$$c) \lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L, \forall k \in \mathbb{R}$$

أي أن غاية حاصل ضرب مقدار ثابت في دالة لها غاية عند عدد معين يساوي حاصل ضرب المقدار الثابت في غاية الدالة عند العدد نفسه.

$$d) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

أي أن غاية ناتج قسمة دالتين لهما غاية عند عدد معين تساوي ناتج قسمة غائتي الدالتين عند العدد نفسه بشرط إن غاية الدالة المقسوم عليها لا تساوي صفرًا.

$$e) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, (\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0)$$

أي إن غاية الدالة الواقعة تحت جذر مهما كانت رتبته عند عدد معين تساوي جذر غاية تلك الدالة عند العدد نفسه بشرط أن قيمة الغاية ليست سالبة.

مثال 6:- إذا كانت $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = x^3 + 2$ جد

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} [7 \cdot f(x)] \quad 6) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^2 + 9}$$

الحل:-

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 1) = 1^2 + 2(1) + 1 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2) = 1^3 + 2 = 3$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 - 3 = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{4}{3}$$


$$5) \lim_{x \rightarrow 1} [7 \cdot f(x)] = 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7 \cdot 4 = 28$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt[3]{2x^2 + 9} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 9)} = \sqrt[3]{(2(3)^2 + 9)} = \sqrt[3]{27} = 3$$

لنناقش الان غاية الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ عندما تقترب قيمة x من 1 فلو عوضنا عن x بالعدد 1 لاصبح لدينا $\frac{1^2-1}{1-1}$ والتي تساوي $\frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة . من هذا نستنتج ان التعويض المباشر قد يفشل أحياناً في إيجاد قيمة الغاية ويمكننا التوصل الى قيمة الغاية بتحليل المقدار $x^2 - 1$ الى عوامله كما يلي :-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$


وفيما يأتي أمثلة اخرى يفشل فيها التعويض المباشر :-

مثال 7 :- جد قيمة $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ 

الحل: وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$


$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x} + 2) = \sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$$

مثال 8 :- جد قيمة $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ 

الحل:- وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{1^3-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$


$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = (1^2 + 1 + 1) = 3$$

مثال 9 :- جد قيمة $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ 

الحل:- وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-1} = 0$$

مثال 10 :- جد قيمة $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$ 

الحل:- وهي كمية غير معرفة

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-5}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5-5}}{5-5} = \frac{0}{0}$$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-5}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x-5}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-5}} = \frac{1}{\sqrt{5-5}} = \frac{1}{0}$ وهي كمية غير معرفة
وعليه فإن الدالة التي قاعدة إقترانها $\frac{\sqrt{x-5}}{x-5}$ ليس لها غاية عند $x = 5$

مثال 11:- لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x > 1 \\ 2x + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ هل للدالة غاية عندما $x \rightarrow 1$



الحل:-

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 2) = 2(1) + 2 = 4 = L_2$$

$$\because L_1 = L_2 = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

ملاحظة : لا يشترط إنتماء العنصر إلى مجال الدالة عند إيجاد الغاية

مثال 12:- لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \forall x \leq 2 \\ x + 1 & \forall x > 2 \end{cases}$ ، هل للدالة غاية عندما



1) $x \rightarrow 2$

2) $x \rightarrow 0$

الحل:-

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3 = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1 = L_2$$

$$\because L_1 \neq L_2 \Rightarrow \text{الدالة ليس لها غاية عند } x = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3) = 0^2 - 3 = -3$$

أي إن غاية الدالة $f(x)$ عندما x تقترب من العدد 0 موجودة وقيمتها -3

تمارين (2-1)

1. جد قيمة النهايات الآتية (إن وجدت) .



a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 3x + 5)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 5)$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{5x^2 + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{x+6}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-6}{x+5}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x-2}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

k) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-5}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

2. ليكن $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \forall x > 2 \\ 2x - 1 & \forall x \leq 2 \end{cases}$ ، جد قيمة النهاية (إن وجدت) في الحالات



الآتية:-

a) $x \rightarrow 2$

b) $x \rightarrow 0$

c) $x \rightarrow 5$

3. ليكن $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \forall x < 1 \\ x + 2 & \forall x \geq 1 \end{cases}$ ، هل للدالة نهاية عندما $x \rightarrow 1$



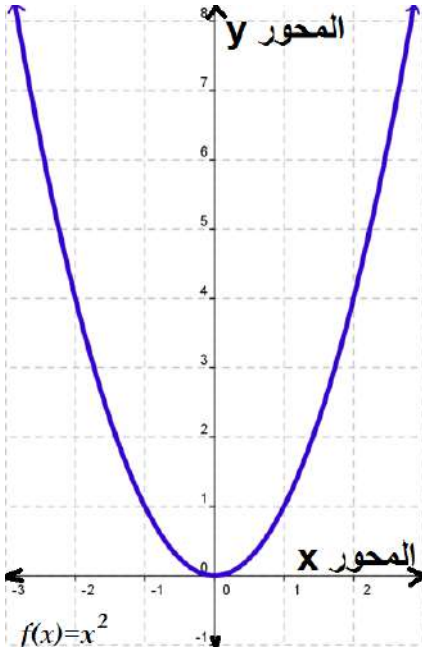
4. إذا كانت $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = x^2 - 4$ ، جد ما يلي :-



a) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - g(x)]$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)]$

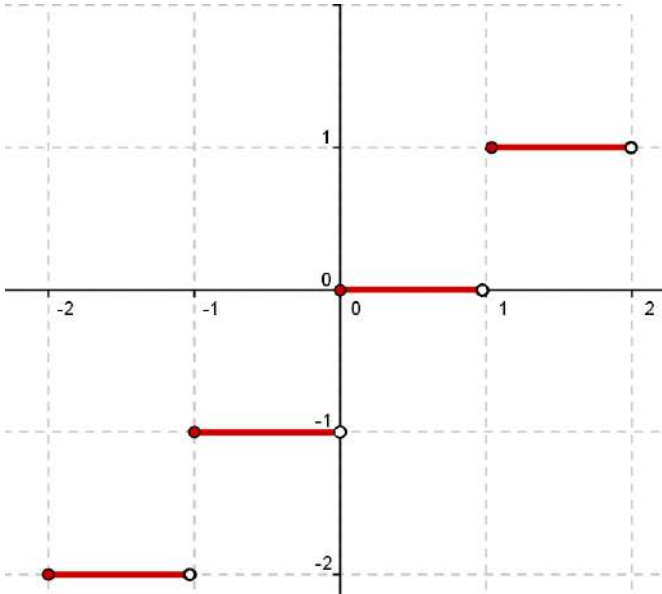
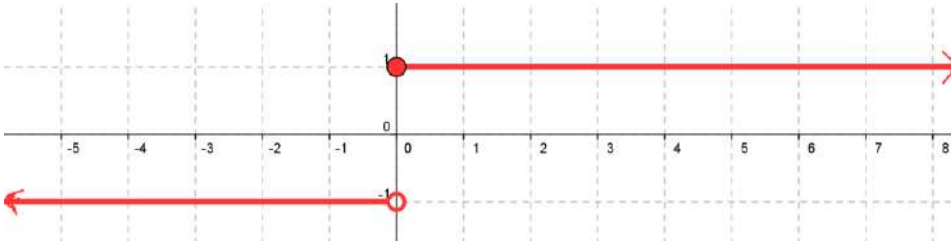
d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} [7 \cdot f(x)]$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{[f(x)]^4}$

[2-4] الاستمرارية (Continuity)



لتوضيح فكرة الاستمرارية للدوال نقول إن الدالة المستمرة في جميع نقاطها تتيح لنا عند رسم مخططها البياني إتمام رسمها على الورق دون رفع القلم عن الورقة كما في الدالة $f(x) = x^2$ والتي يبين الشكل المجاور المخطط البياني لها . كما إن هنالك بعض الدوال التي تكون مستمرة في جميع نقاطها عدا نقطة واحدة أو أكثر والتي عندما نحاول رسم المخطط البياني لها نضطر لرفع القلم عن الورقة مرة أو أكثر . مثل هذه الدوال تسمى بالدوال غير المستمرة عند نقطة أو أكثر من نقاطها وخير مثال عليها الدالة الآتية والتي تسمى بدالة الإشارة وهي دالة تعطي قيمة (-1) إذا كانت قيمة x سالبة وتعطي قيمة $(+1)$ إذا كانت قيمة x موجبه أو صفراً وفي ادناه الصيغة الرياضية لهذه الدالة مع مخططها البياني

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \forall x < 0 \\ 1, & \forall x \geq 0 \end{cases}$$



وكذلك الدالة المسماة بالدالة السلمية (نسبة الى مخططها البياني والذي يشبه السلم) والتي تعطي قيمة اكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x والمبينه صيغتها الرياضية مع مخططها البياني في الشكل المجاور

اكبر عدد صحيح اصغر او يساوي

$$f(x) = [x] = x$$

[2-5] استمرارية الدالة عند نقطة معينة

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ بأنها دالة مستمرة عند النقطة التي إحداثياتها x هو $x = a$ إذا تحقق ما يلي :-

- 1) $f(a)$ موجودة وحقيقية
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة ووحيدة
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ملاحظة:- إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من الشروط الواردة بالتعريف أعلاه فإن الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = a$

مثال 13:- ليكن $f(x) = x^2 + 5x + 2$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 3$

الحل :- إن أوسع مجال لهذه الدالة هو (\mathbb{R}) (لأنها كثيرة الحدود) .

$$1) f(3) = 3^2 + 5 \times 3 + 2 = 9 + 15 + 2 = 26 \text{ موجودة وحقيقية}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 5x + 2) = 3^2 + 5 \times 3 + 2 = 9 + 15 + 2 = 26$$

أي ان الغاية موجوده ووحيدة

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 26$$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 3$

مثال 14:- إبحث أستمرارية الدالة $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x-1}$ عند $x = 1$

$$1) f(1) = \frac{1^2+3 \times 1-4}{1-1} = \frac{1+3-4}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ وهي كمية غير معرفّة}$$

الحل:- ونظراً لعدم تحقق الشرط الاول من شروط إستمرارية الدالة عند نقطة ما لذلك فإن الدالة غير مستمرة عند $x = 1$ ولا حاجة للتحقق من بقية الشروط الأخرى .

مثال 15:- ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x < 2 \\ x + 3 & \forall x \geq 2 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 2$

$$1) (2) = 2 + 3 = 5 \text{ موجودة وحقيقية}$$

الحل:-

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

أي ان الغاية موجودة ووحيدة

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال 16:- $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \forall x > 1 \\ 5 - x & \forall x \leq 1 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 1$



الحل :

1) $f(1) = 5 - 1 = 4$ موجودة وحقيقية

2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (5 - x) = 5 - 1 = 4$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

أي ان غاية الدالة غير موجودة كونها ليست وحيدة وهذا يعني ان الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x = 1$

مثال 17:- لتكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 12 & \forall x = 2 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 2$



الحل:

1) $f(2) = 12$ موجودة وحقيقية

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2 \times 2 + 4 = 4 + 4 + 4 = 12$

اي ان الغاية موجودة ووحيدة

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 12$

ونظراً لتحقق الشروط الثلاثة فإن الدالة مستمرة عند $x = 2$

مثال 18:- $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \forall x > 2 \\ 12 & , x = 2 \\ 5x - 3 & \forall x < 2 \end{cases}$ ، أبحث إستمرارية الدالة عند $x = 2$



عند $x = 2$

الحل:

1) $f(2) = 12$ موجودة وحقيقية

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 3) = 2 \times 2 + 3 = 7$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (5x - 3) = 5 \times 2 - 3 = 10 - 3 = 7$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 7 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

أي ان الغاية موجودة ووحيدة

3) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

ونظراً لعدم تحقق الشرط الثالث فإن الدالة ليست مستمرة عند $x = 2$

مثال 19:- لتكن $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \forall x \geq 1 \\ 2x + b & \forall x < 1 \end{cases}$ فإذا علمت ان الدالة مستمرة عند $x = 1$



جد قيمة $b \in \mathbb{R}$

الحل :- بما ان الدالة مستمرة فإن الدالة لها غاية وحيدة أي

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (2 + x^2) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + b)$

$$\begin{aligned} 2 + 1^2 &= 2 \times 1 + b \\ 3 &= 2 + b \\ b &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

مثال 20:- لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 9 & \forall x < 3 \\ 3x + b & \forall x \geq 3 \end{cases}$ فإذا علمت إن الدالة مستمرة عند $x = 3$ ، $f(5) = 3$ ، جد قيمة $a, b \in \mathbb{R}$



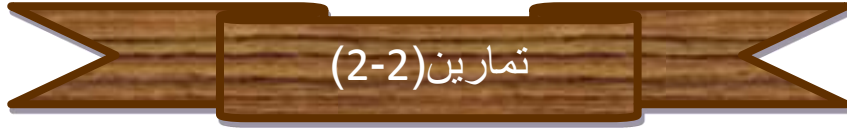
الحل:- بما ان الدالة مستمرة فإن الدالة لها غاية وحيدة أي


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + ax + 9) &= \lim_{x \rightarrow 3} (3x + b) \\ 3^2 + 3a + 9 &= 3 \times 3 + b \\ 18 + 3a &= 9 + b \\ 3a - b &= -9 \dots \dots (1) \end{aligned}$$


وبما ان $f(5) = 3$ (لاحظ ان $5 > 3$)


$$3(5) + b = 3 \Rightarrow 15 + b = 3 \Rightarrow \boxed{b = -12}$$


$$3a - (-12) = -9 \Rightarrow 3a = -9 - 12 \Rightarrow 3a = -21 \Rightarrow \boxed{a = -7}$$





1. ليكن $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$ ؟ 

2. ليكن $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+5}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 0$ ؟ 

3. ليكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x \geq \sqrt{3} \\ 7 - x^2 & \forall x < \sqrt{3} \end{cases}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = \sqrt{3}$ ؟ 

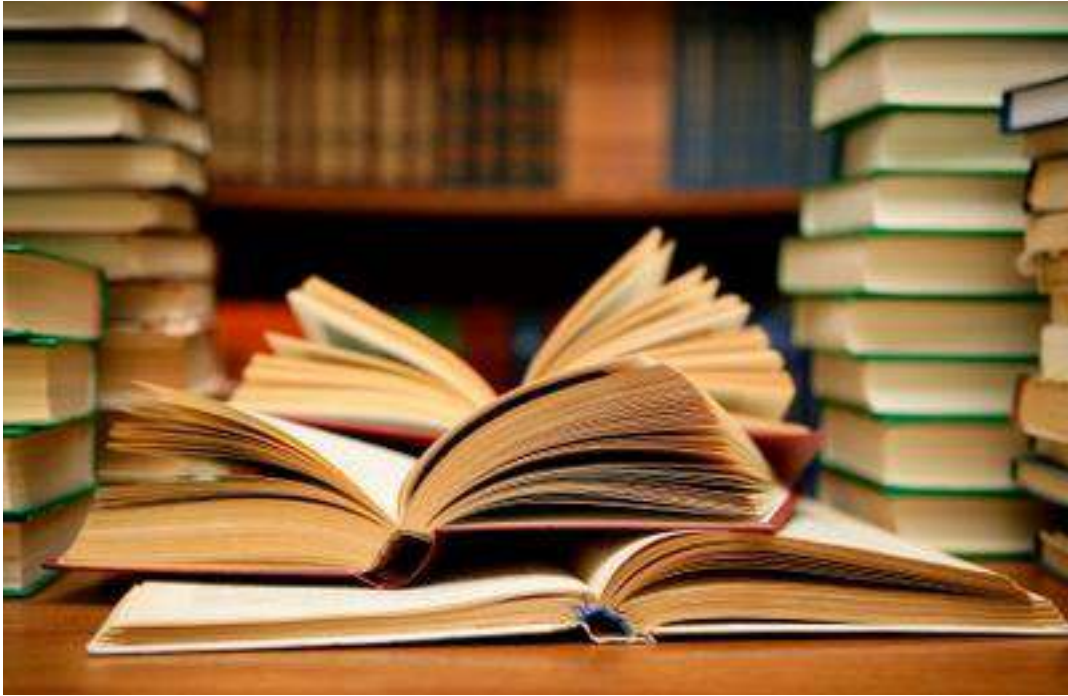
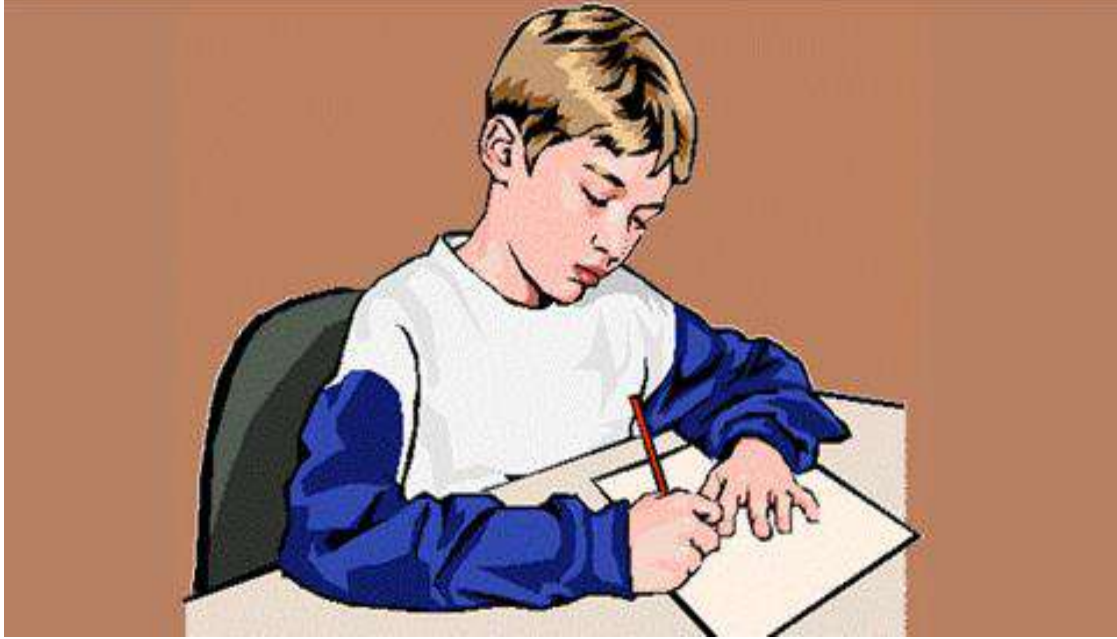
4. ليكن $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \forall x > 2 \\ 5 - x^2 & \forall x \leq 2 \end{cases}$ ، هل إن الدالة $f(x)$ مستمرة عند $x = 2$ ؟ 

5. ليكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x} & \forall x > -1 \\ 7 & , x = -1 \\ 2x^2 - 3 & \forall x < -1 \end{cases}$ ، إبحث أستمراية الدالة عند $x = -1$. 

6. ليكن $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{x-3} & \forall x \geq 1 \\ k & \forall x < 1 \end{cases}$ ، جد قيمة k اذا علمت ان الدالة مستمرة عند $x = 3$. 

الفصل الثالث

حساب التفاضل



الفصل الثالث حساب التفاضل

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا ان يكون قادراً على ان :-

1. يدرك أهمية علم التفاضل وتطبيقاته في مختلف العلوم .
2. يدرك المفهوم الأساسي للمشتقة كونها غاية لـ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \rightarrow 0$ ويستخدم هذا التعريف في حل مسائل إيجاد الغاية .
3. ستوعب التفسير الهندسي للمشتقة ويستعمله لإيجاد معادلة المماس للمنحني عند نقطة التماس .
4. يستخرج المشتقة بإستعمال القوانين ويتعلم إستخراج المشتقات من الرتب العليا .



الفصل الثالث حساب التفاضل

- [3-1] نبذة تاريخية .
- [3-2] علم التفاضل والتكامل .
- [3-3] تعريف المشتقة.
- [3-4] قواعد ايجاد المشتقة .
- [3-5] المشتقات من الرتب العليا .



[3-1] نبذة تاريخية

ظهر علم التفاضل والتكامل كأحد فروع علم الرياضيات نتيجة لتطور الفكر الرياضي عموماً في منتصف العقد التاسع من القرن السابع عشر حيث نشر كل من إسحق نيوتن وجتفر يد ولهم ليبنتز بصورة مستقلة إكتشافهما لحساب التفاضل والتكامل. إلا إن هنالك إشارات الى إن عالم الرياضيات البريطاني إسحق بارو (1630-1677م) يعتبر هو المؤسس الاول لعلم التفاضل والتكامل وإن إسحق نيوتن كان أحد تلامذته، حيث نشر العديد من المحاضرات في هذا العلم في ما نطلق عليه اليوم ميل مماس المنحني (*Slope of the tangent to a curve*).

يعتقد البعض إن التفاضل قد سبق التكامل كون التكامل عملية عكسية للتفاضل وهذا الاعتقاد غير صحيح فقد أظهرت الأدلة التاريخية إستخدام التكامل بطرق غير مباشرة في حساب المساحات والحجوم كما كان في عهد المصريين القدماء في طريقة حساب حجم الهرم الناقص ، تبعمهم اليونانيون في إستخدام طريقة الاستنزاف لحساب المساحات والحجوم ثم أزدهرت هذه الطريقة في عهد ((أرشميدس)) الذي أدخل فكرة الخبرة المكتسبة والتي تمثل جزءاً أساسياً في علم التكامل ثم إنتقلت طريقة الاستنزاف الى الصين حيث عملوا جاهدين على إيجاد مساحة الدائرة وحجم الكرة. وفي العصر الاسلامي أستخدم الحسن ابن الهيثم طريقة تكاملية لاستنباط الصيغة العامة لمجموع متتالية حسابية من الدرجة الرابعة، ثم ابتدع الصينيون معادلات تتعامل مع التكامل وفي الهند بدأ الاشتقاق بالظهور على يد عالم هندي وصف التغيرات المتناهية في الصغر ... كما تناول آخرون متسلسلات شبيهه بمتسلسلة تايلور.

[3-2] علم التفاضل والتكامل (Calculus)

هو فرع من فروع علم الرياضيات يدرس النهايات (الغايات) والاشتقاق والتكامل (عكس الاشتقاق) والمتسلسلات اللانهائية، وهو علم يستخدم لدراسة التغير في الدوال وتحليلها ، وينقسم هذا العلم على فرعين رئيسيين هما التفاضل (*Differentiation*) والتكامل (*Integration*) ويربط بينهما ما يعرف بالنظرية الاساسية للتفاضل والتكامل.

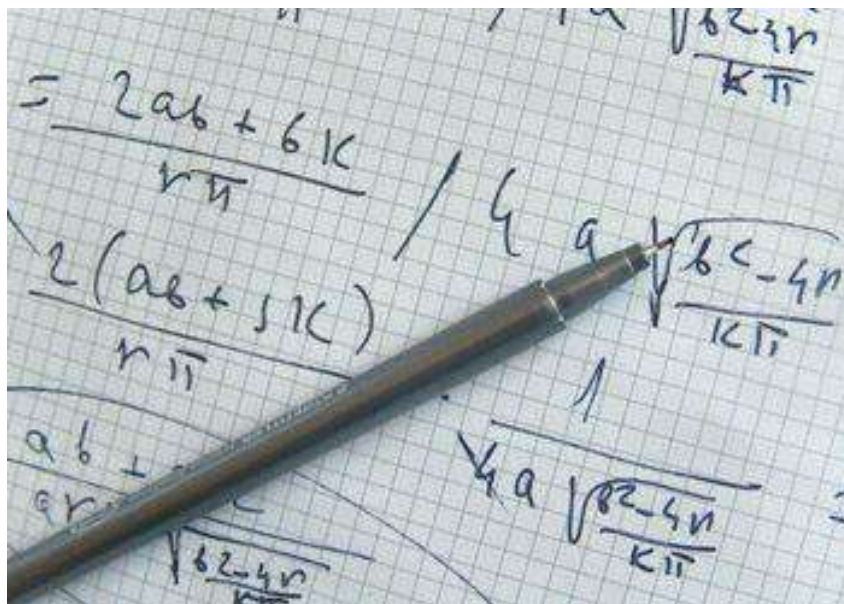
إن المبدأ الاساسي لحسابان التفاضل يعتمد إعتماً كبيراً على مفهوم الغاية والذي تناولناه بالبحث في الفصل السابق كما إن لعلم التفاضل والتكامل تطبيقات لا حصر لها في علوم الفيزياء الكلاسيكية والحديثة وعلوم الكيمياء، الهندسة، الاقتصاد، الحاسوب .. وحتى الطب وبعض العلوم السياسية واليك عزيزي الطالب بعض الامثلة :-

- ✚ حساب أطوال المنحنيات ، المساحات ، الحجوم .
- ✚ حساب مركز الثقل، عزم القصور الذاتي، كمية الحركة، التجميل، السرعة، الازاحة، الشغل، الطاقة.
- ✚ حساب التوزيعات والاحتمالات المنتظمة مثل (إحتمالية فيرمي في أشباه الموصلات، إنتشار الجراثيم في وسط معين تحت ظروف بيئية معينة) .
- ✚ حل المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها في الانظمة الخطية مثل البندول، دوائر الرنين الكهربائية وأنظمة التحكم الكهروميكانيكية .

✚ حساب الثوابت الرياضية الى درجة عالية من الدقة مثل قيمة الثابت π وأساس اللوغاريتم الطبيعي e .

يستخدم في علم التفاضل والتكامل عدد من الرموز عند التعامل مع المصطلحات والمتغيرات المختلفة وفي أدناه بعضاً منها :-

1. $f(x)$ الدالة
2. Δx التغير في قيمة x
3. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ الغاية عندما التغير في قيمة x (أي Δx) الصفر صغير ويقترب من
4. $\frac{dy}{dx}, y', f'(x)$ المشتقة الاولى
5. $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', f''(x)$ المشتقة الثانية
6. m ميل المماس للمنحني



[3-3] تعريف المشتقة

لتكن دالة معرفة ومستمرة عند قيمة معينة ولتكن x فإذا كانت الغاية

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

موجودة عند تلك القيمة x فإن هذه الغاية تسمى مشتقة الدالة $y = f(x)$ ويرمز لها بأحد

$$\frac{dy}{dx}, y', f'(x)$$
 الرموز الآتية

ملاحظة:-

يظهر من تعريف المشتقة أعلاه أن هناك تغيراً صغيراً في قيمة المتغير x مقداره Δx أدى الى حدوث تغيير صغير في قيمة الدالة $f(x)$ مقداره $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ وأن حاصل قسمة Δy على Δx يمثل معدل تغير الدالة ، وعندما تؤخذ الغاية لهذا المعدل عندما تقترب Δx من الصفر فإننا بذلك نحصل على معدل التغير الآني أو اللحظي للدالة ، وعليه تعرّف مشتقة الدالة $y = f(x)$ بالصورة

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

على أنها معدل التغير الآني (أو اللحظي) للدالة .

مثال 1:- إذا كانت $y = f(x) = 2x$ جد المشتقة بطريقة التعريف .



الحل:-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

مثال 2:- إذا كانت $y = f(x) = x^2 + 3$ جد المشتقة بطريقة التعريف.



الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 3 - (x^2 + 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[2x + (\Delta x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [2x + (\Delta x)] \\ &= 2x + 0 \\ &= 2x\end{aligned}$$

مثال 3:- إذا كانت $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ جد المشتقة بطريقة التعريف.



الحل :-

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 5 - (2x^2 - 3x + 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] - 3x - 3\Delta x + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x - 2x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x - 3) \\ &= (4x + 0 - 3) \\ &= 4x - 3\end{aligned}$$

مثال 4:- إذا كانت $y = f(x) = \frac{3}{x}$ جد المشتقة عندما $x = 3$ بطريقة التعريف .



الحل :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x + \Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x}{x(x + \Delta x) \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x + \Delta x)} \times \frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x + 0)} = \frac{-3}{x^2} \end{aligned}$$

وعندما $x = 3$ فان:-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{3^2} = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

[3-4] قواعد ايجاد المشتقة

في هذا البند سنقدم بعض القواعد التي تسهل علينا استخراج مشتقة الدالة عند نقطة في مجالها بدون استخدام التعريف ، وبرهنة هذه القواعد ممكن باستخدام التعريف إلا أننا سوف نقبل بها بدون برهان وهي:-

$$(1) \text{ مشتقة الدالة الثابتة } y = f(x) = c \text{ حيث } c \text{ عدد حقيقي ثابت هي } \frac{dy}{dx} = y' = 0$$



مثال 8:-

$$\begin{aligned} &\text{إذا كانت } y = 7 \text{ فإن } y' = 0 \\ &\text{وإذا كانت } f(x) = -5 \text{ فإن } f'(x) = 0 \\ &\text{وإذا كانت } y = \frac{1}{2} \text{ فإن } y' = 0 \\ &\text{وإذا كانت } h(x) = \sqrt{3} \text{ فإن } h'(x) = 0 \end{aligned}$$

(2) مشتقة $y = f(x) = x^n$ تساوي $y' = f'(x) = nx^{n-1}$ حيث $n \in \mathbb{R}$

مثال 9:-

إذا كانت $y = x^3$ فإن $y' = 3x^2$
وإذا كانت $f(x) = x^5$ فإن $f'(x) = 5x^4$
وإذا كانت $y = x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = x^0 = 1$
وإذا كانت $g(x) = x^{-4}$ فإن $g'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}$

(3) مشتقة $y = f(x) = a \cdot x^n$ تساوي $y' = f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ حيث

$n \in \mathbb{R}$

مثال 10:-

إذا كانت $y = 3x^5$ فإن $y' = 15x^4$
وإذا كانت $y = 5 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ فإن المشتقة تستخرج كما يلي :-
 $y = 5 \times x^{\frac{2}{3}} \rightarrow y' = 5 \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

(4) مشتقة مجموع او طرح دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي حاصل جمع او طرح مشتقتيهما في تلك النقطة

مثال 11:-

إذا كانت $y = 4x^{-3} - 5x^2 + 7x - 12$ فإن
 $y' = -3 \times 4x^{-3-1} - 5 \times 2x^{2-1} + 7x^{1-1} - 0$
 $y' = -12x^{-4} - 10x + 7$

(5) مشتقة حاصل ضرب دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي الدالة الاولى \times مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية \times مشتقة الدالة الاولى

مثال 12:-

إذا كانت $f(x) = (3x - 2)(4x + 1)$ فإن
 $f'(x) = (3x - 2) \times 4 + (4x + 1) \times 3$
 $f'(x) = 12x - 8 + 12x + 3$
 $f'(x) = 24x - 5$

(6) مشتقة حاصل قسمة دالتين كل منهما قابلة للاشتقاق في نفس النقطة يساوي

المقام \times مشتقة البسط - البسط \times مشتقة المقام

مربع المقام

مثال 13:-

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ ، $x \neq -\frac{2}{3}$ فإن

$$f'(x) = \frac{(3x+2) \times 2 - (2x+1) \times 3}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x+4-6x-3}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(3x+2)^2}$$

(7) مشتقة الدالة بالصورة $f(x) = [f(x)]^n$ تساوي $f'(x) = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ أي ان القوس المرفوع لأس نشتقه من الخارج ثم من الداخل

مثال 14:- إذا كانت $y = 4 \times (2x^2 + 3x - 2)^5$ فإن

$$y' = 20(2x^2 + 3x - 2)^4 \times (4x + 3)$$

مثال 15:- جد المشتقة الاولى الدوال الآتية :-

$$1) y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} \quad 2) f(x) = \frac{x^3-1}{x^4+1} \quad 3) y = \left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)^2$$

$$4) g(x) = (x^3 - 2x^2)^4 \quad 5) y = \frac{x}{2} - \frac{5x^3}{2} \quad 6) h(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^5}$$

$$7) y = \frac{5}{x^2-7x+3} \quad 8) f(x) = (4x^2 - 3)^2 \cdot (x + 5) \quad 9) y = \frac{7}{x^9}$$

$$10) y = \sqrt{\frac{4}{x^3}} - \sqrt{3x}$$

$$11) y = \frac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$12) f(t) = \sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}}$$

الحل:-

$$1) y = \sqrt[5]{x^{13} + 13 + x^{-13}} = (x^{13} + 13 + x^{-13})^{\frac{1}{5}}$$

$$y' = \frac{1}{5} (x^{13} + 13 + x^{-13})^{-\frac{4}{5}} (13x^{12} - 13x^{-14})$$

$$2) f(x) = \frac{x^3-1}{x^4+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x^4+1)-4x^3(x^3-1)}{(x^4+1)^2}$$

$$3) y = \left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right)^2 \Rightarrow y' = 2 \left(\frac{x+2}{x^2-3x}\right) \left[\frac{(x^2-3x)-(2x-3)(x+2)}{(x^2-3x)^2}\right]$$

$$4) g(x) = (x^3 - 2x^2)^4 \Rightarrow g'(x) = 4(x^3 - 2x^2)^3 (3x^2 - 4x)$$

$$5) y = \frac{x}{2} - \frac{5x^3}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} (3x^2) = \frac{1}{2} - \frac{15}{2} x^2$$

$$6) h(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^5} \Rightarrow h(x) = (1+x^2)^{\frac{5}{3}}$$

$$h'(x) = \frac{5}{3} (1+x^2)^{\frac{2}{3}} (2x) = \frac{10x}{3} (1+x^2)^{\frac{2}{3}} = \frac{10x}{3} \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$$

$$7) y = \frac{5}{x^2-7x+3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2-7x+3) \cdot 0 - 5(2x-7)}{(x^2-7x+3)^2} = \frac{-10x+35}{(x^2-7x+3)^2}$$

$$8) f(x) = (4x^2 - 3)^2 \times (x + 5)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^2 - 3)^2 \times 1 + (x + 5) \times 2(4x^2 - 3)^1 \times 8x \\ &= (4x^2 - 3)^2 + 16x(4x^2 - 3) \times (x + 5) \\ &= (4x^2 - 3)[20x^2 + 80x - 3] \end{aligned}$$

$$9) y = \frac{7}{x^9} \Rightarrow y = 7x^{-9} \Rightarrow y' = -63x^{-10} \Rightarrow y' = \frac{-63}{x^{10}}$$

$$10) y = \sqrt{\frac{4}{x^3}} - \sqrt{3x} \Rightarrow y = 2x^{-\frac{3}{2}} - \sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 2 \times \frac{-3}{2} \times x^{-\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-3}{x^{\frac{5}{2}}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{x^5}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$11) y = \frac{2x^2-3}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = \frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}} \times 4x - (2x^2-3) \times \frac{1}{3}(x^2+7)^{-\frac{2}{3}} \times 2x}{\left[(x^2+7)^{\frac{1}{3}}\right]^2}$$

$$y' = \frac{(x^2+7)^{\frac{1}{3}} \left[4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}\right]}{(x^2+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x - \frac{2}{3}x(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$y' = \frac{2x \left(2 - \frac{1}{3}(2x^2-3)(x^2+7)^{-1}\right)}{(x^2+7)^{\frac{1}{3}}}$$

$$12) f(t) = \sqrt{\frac{3t^2-4}{2t+5}} = \left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{3t^2-4}{2t+5}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{6t(2t+5) - 2(3t^2-4)}{(2t+5)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2t+5}{3t^2-4}} \times \frac{6t^2+30t+8}{(2t+5)^2}$$

تمارين (3-1)

1. باستخدام التعريف جد المشتقة الاولى لكل من الدوال الآتية:-



- a) $y = x^2 + 4x - 3$
- b) $f(x) = 2x - 7$
- c) $f(t) = 3t + 7$

2. جد المشتقة الاولى لكل من الدوال الآتية :-



- a) $y = (2x^3 - 7)(3x^2)$
- b) $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{3x}$
- c) $y = \frac{2}{3x^2 - 7x + 3}$
- d) $g(x) = \frac{5}{4x^3 - 3x^2}$
- e) $y = \frac{1}{x+2} - x$
- f) $f(t) = \frac{(3t-2)(t+7)}{3t-1}$
- g) $y = \frac{3x^2}{(5x+7)(2x-1)}$
- h) $h(x) = (2x^4 - 1.9)^3$
- i) $y = \frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2(x-2)^3}$
- j) $g(x) = (2x^3 - 4x + 7)^{-2}$
- k) $y = \left(\frac{\sqrt{2x-7}}{x^2}\right)^{-1}$
- l) $h(x) = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}$
- m) $y = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1.8}}$
- n) $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$
- o) $y = \frac{3}{(2x+4)^3}$
- p) $g(x) = \frac{(3-2x)^{\frac{4}{3}}}{x^2}$

$$q) y = x^3 \cdot (5x^2)^{\frac{-2}{3}}$$

$$r) h(x) = 2x^{-3} + 7x^{-5}$$

$$s) y = (4x^2\sqrt{x^3})^{\frac{1}{4}}$$

$$t) f(t) = \sqrt{\frac{t-2}{t^2+5}}$$

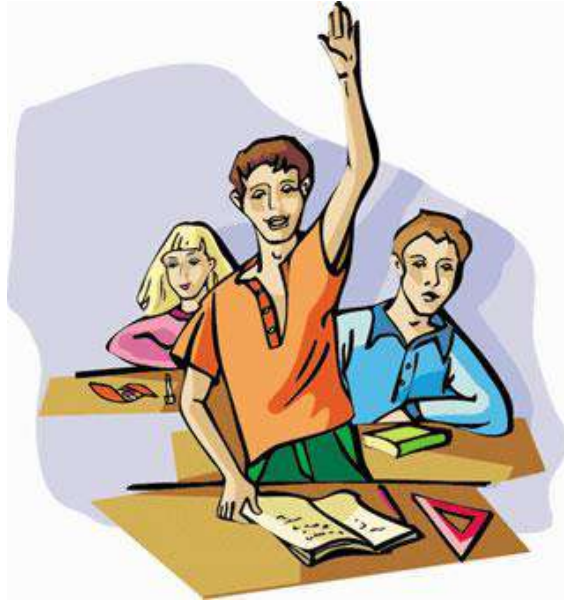
3. في كل مما يأتي ، جد معادلة المماس للمنحني عند النقطة المعطاة ازاء كل دالة:-



$$a) f(x) = \frac{3x^2}{3x-7} ; (2, -12)$$

$$b) f(x) = (16 - x^4)^3 ; (2, 0)$$

$$c) f(x) = \sqrt{-1 - 2x + 3x^2} ; (-1, 2)$$



[3-5] المشتقات من الرتب العليا

تعرف المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ بأنها مشتقة المشتقة الاولى $f'(x)$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق مرتين ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^2y}{dx^2}, f''(x), y''$$

وتعرف المشتقة الثالثة للدالة $f(x)$ بأنها مشتقة المشتقة الثانية $f''(x)$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق ثلاث مرات ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^3y}{dx^3}, f'''(x), y'''$$

وتعرف المشتقة الرابعة للدالة $f(x)$ بأنها مشتقة المشتقة الثالثة $f'''(x)$ بشرط ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق اربع مرات ويرمز لها بأحد الرموز الآتية

$$\frac{d^4y}{dx^4}, f''''(x), y''''$$

بشكل عام تعرف المشتقة من الرتبة n للدالة $f(x)$ بأنها مشتقة المشتقة $(n-1)$ للدالة بشرط

$$\frac{d^ny}{dx^n} \text{ ان تكون الدالة قابلة للاشتقاق } n \text{ من مرات ويرمز لها}$$

مثال 16 :- جد $\frac{d^3y}{dx^3}$ (المشتقة الثالثة) إذا كانت $y = 6x^5$



الحل :-

$$\frac{dy}{dx} = 30x^4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(30x^4) = 120x^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy}{dx}(120x^3) = 360x^2$$

تمارين (3-2)

أحسب المشتقة الثانية للدوال الآتية عند القيم المعطاة مع كل دالة



a) $f(x) = 8x^{10} + 2x^8 - 4x^5 + 1$; $x = 1$

b) $f(x) = \frac{4x^2}{3x-7}$; $x = 2$

c) $f(x) = (4-x)^{\frac{5}{4}}$; $x = 3$

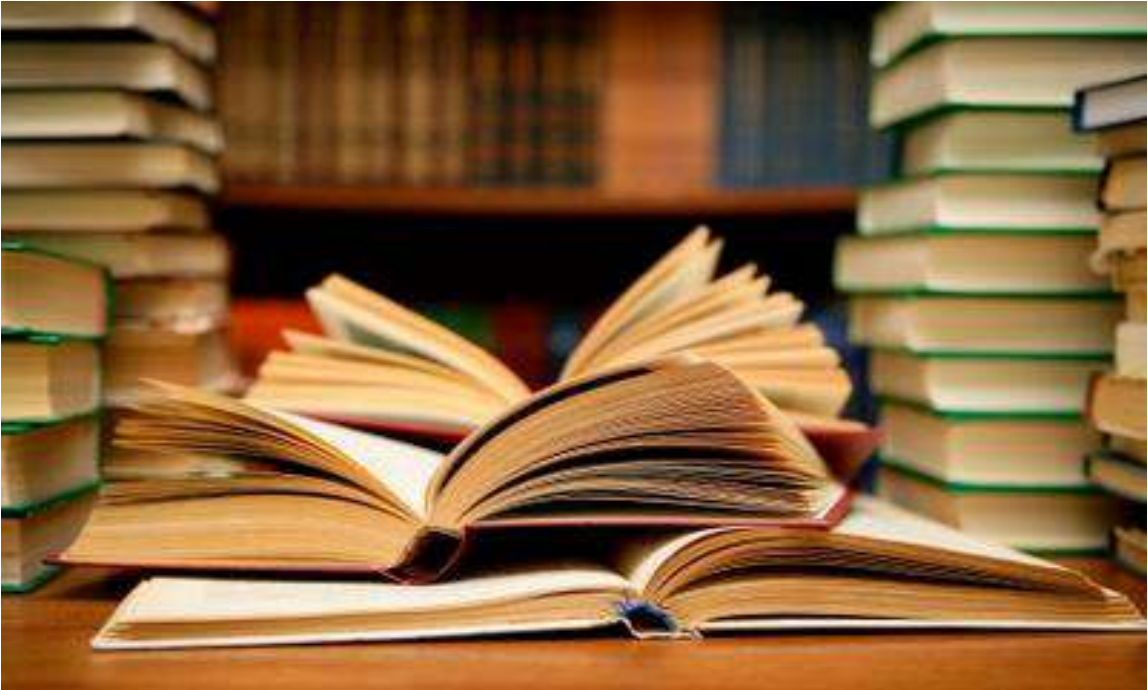
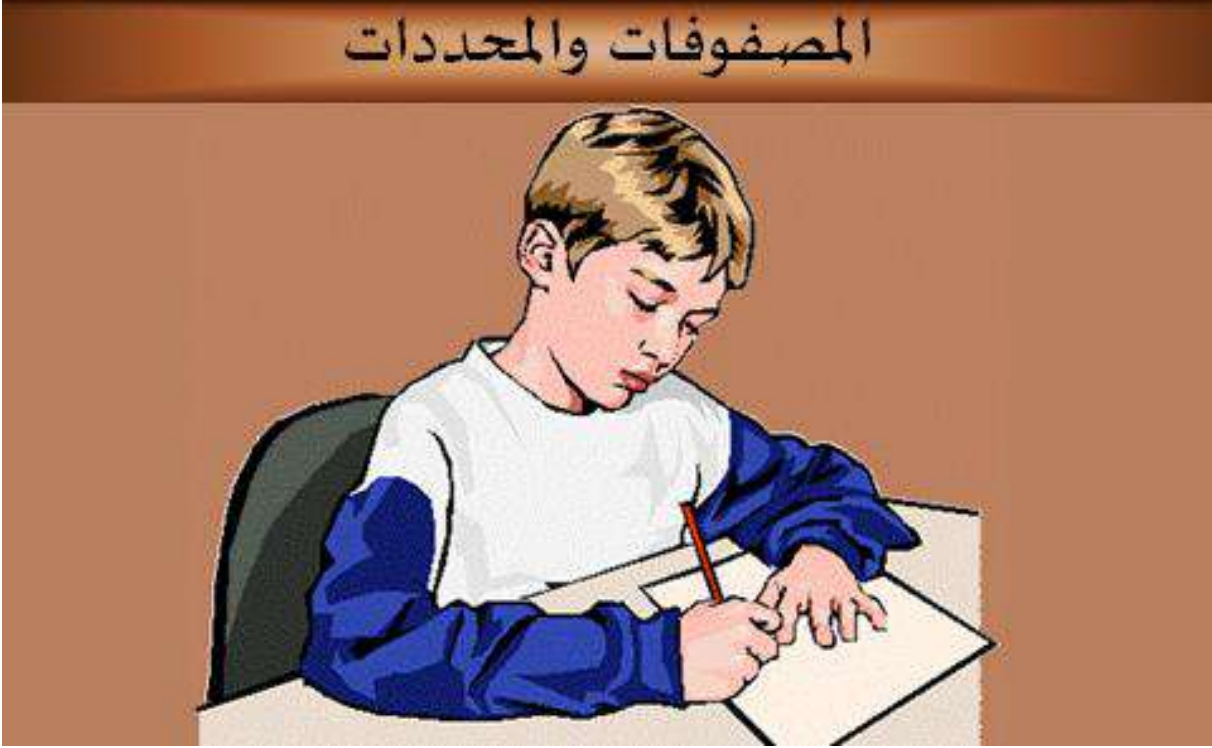
d) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $x = -1$

e) $f(x) = \frac{-5}{x^3}$; $x = -1$



الفصل الرابع

المصفوفات والمحددات

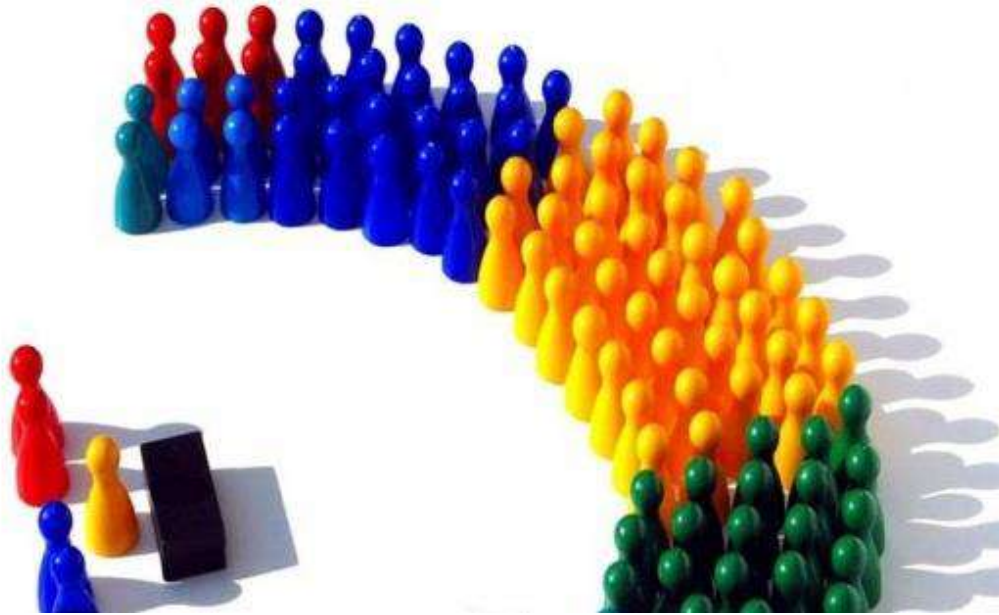


الفصل الرابع المصفوفات والمحددات

الاهداف السلوكية:

ينبغي على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1. يدرك مفهوم المصفوفات ويتعرف على معظم أنواعها المهمة .
2. يتقن إجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب على المصفوفات.
3. يستخرج قيمة محددة المصفوفة من الرتب 2×2 و 3×3 .
4. ينجز حل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين وفقاً لطريقة المحددات .
5. ينجز حل نظام خطي مؤلف من 3 معادلات بثلاثة متغيرات وفقاً لطريقة المحددات .



الفصل الرابع المصفوفات والمحددات



- [4-1] المقدمة .
- [4-2] مفاهيم المصفوفات .
- [4-2-1] تعريف المصفوفة .
- [4-2-2] رتبة المصفوفة .
- [4-2-3] الإشارة الى موقع العنصر في المصفوفة .
- [4-2-4] بعض أنواع المصفوفات .
- [4-3] تساوي المصفوفات .
- [4-4] جبر المصفوفات .
- [4-4-1] جمع وطرح المصفوفات .
- [4-4-2] خواص جمع المصفوفات .
- [4-4-3] ضرب المصفوفات بعدد ثابت .
- [4-4-4] ضرب المصفوفات ببعضها .
- [4-4-4-1] ضرب صف بعمود .
- [4-4-4-2] ضرب مصفوفة بمصفوفة اخرى .
- [4-5] المحددات .
- [4-5-1] إيجاد قيمة المحددة المربعة 2×2 .
- [4-5-2] إيجاد قيمة المحددة المربعة 3×3 .
- [4-5-3] بعض خواص المحددات .
- [4-6] حل المعادلات الخطية بإستعمال المحددات .
- [4-6-1] حل معادلتين خطيتين بمتغيرين بإستعمال المحددات .
- [4-6-2] حل نظام خطي مؤلف من ثلاث معادلات بثلاثة متغيرات بإستعمال المحددات .

[4-1] المقدمة

يبدو أن أول ذكر للمصفوفات ورد في كتاب صيني يدعى ((تسعة كتب في الحساب)) قبل بداية التاريخ الميلادي. وكان للعالم الياباني (سيكي كوا *Seki Kowa*) عام 1683م وللعالم الألماني غوتفريد فيلهلم ليبنتز (*Leibniz, Gottfried*) عام 1693م الفضل في إكتشاف المصفوفات والمحددات من خلال إستخدام المعلومات الواردة في الكتاب الصيني المذكور أعلاه لحل المعادلات الانية من الدرجة الاولى . وفي العام 1750م توصل العالم ((كرايمر)) الى طرق حل المعادلات الخطية بإستخدام المحددات تلاه العالم ((كيلبي)) عام 1857 الذي توصل الى ما يدعى الان بجبر المصفوفات .

إن المصفوفات لغة وأداة رياضية هامة لها دور بارز في الكثير من التطبيقات الرياضية والفيزيائية والهندسية والإحصائية والإقتصادية فضلاً عن كونها تعد الاسلوب الرئيس لتزويد الحاسبات الالكترونية بالبيانات، وقد جاء الفصل هذا محتوياً على بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالموضوع هذا.

[4-2] مفاهيم المصفوفات

[4-2-1] تعريف المصفوفة (Matrix)

المصفوفة هي ترتيب من الأعداد أو الرموز مكون من صفوف (Rows) وأعمدة (Columns)

محصورة بزوج من الأقواس أما بالشكل $\begin{bmatrix} : & \ddots & : \\ : & \ddots & : \\ : & \ddots & : \end{bmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} : & \ddots & : \\ : & \ddots & : \\ : & \ddots & : \end{pmatrix}$ إذا كانت المصفوفة

مكونة من (m) صف ، (n) عمود فنقول إن المصفوفة من الرتبة (m × n) حيث إن كل من m ، n عدد صحيح موجب .

الاعداد أو الرموز في المصفوفة تسمى عناصر المصفوفة (Elements) ، وإذا تساوى عدد الصفوف وعدد الاعمدة في مصفوفة ما، وليكن n فإنها تسمى (مصفوفة مربعة من الرتبة n) .
يرمز للمصفوفات بحروف اللغة الانكليزية الكبيرة مثل (A , B , C , D , E ,) .



1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ مصفوفة 2×2 وهي مصفوفة مربعة
2. $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$ مصفوفة 2×4 وهي مصفوفة مستطيلة
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ مصفوفة 3×2 وهي مصفوفة مستطيلة
4. $D = (4)_{1 \times 1}$ مصفوفة من عنصر واحد

5. $E = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ مصفوفة 3×1 مكونة من عمود واحد بثلاثة صفوف

6. $F = (4 \ 5 \ 2 \ -3)_{1 \times 4}$ مصفوفة 1×4 مكونة من صف واحد وأربعة أعمدة

[4-2-2] رتبة المصفوفة (Order of Matrix)

هي صيغة تعتمد للتعبير عن عدد صفوف وأعمدة المصفوفة وهذه الصيغة هي $(m \times n)$ وتقرأ من اليسار الى اليمين $(m \text{ by } n)$ حيث تمثل m عدد الصفوف ، n عدد الاعمدة ومن الممكن أن نذكر رتبة المصفوفة بوضعها أسفل القوس المحتوي لعناصرها ومن الممكن أيضاً الاستغناء عن ذلك حسب الحاجه التي تقتضيها طبيعة المسائل التي نستخدمها . فمثلاً :-

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[4-2-3] الإشارة الى موقع العنصر في المصفوفة

من المهم جداً أن يتعود الطالب على استخدام الرموز في التعبير عن المصفوفات أو الإشارة الى موقع عنصر معين داخلها . ولقد تم الاتفاق على استخدام الرمز a للإشارة الى العنصر ضمن المصفوفة مع ذكر الصف والعمود اللذين ينتمي لهما على التوالي في أسفل الجانب الايمن من الرمز a فمثلاً في المصفوفة A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ الآتية:}$$

الرمز a_{11} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الاول
الرمز a_{12} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الثاني
الرمز a_{21} يشير الى العنصر الواقع في الصف الثاني والعمود الاول
الرمز a_{13} يشير الى العنصر الواقع في الصف الاول والعمود الثالث .. وهكذا لبقية العناصر ، وبشكل عام
فإن أي مصفوفة من الرتبة $(m \times n)$ يمكن كتابتها بالصورة $[a_{ij}]$ حيث :-

$$i = 1,2,3,4, \dots, m \quad j = 1,2,3,4, \dots, n$$

أي أن:-

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = [a_{ij}], i = 1,2,3,\dots,m, j = 1,2,3,\dots,n$$

حيث ان المتغيرين i, j في أسفل الرمز a يؤشران موقع العنصر داخل المصفوفة فالمتغير i يمثل الصف الذي يقع فيه العنصر فيه أما المتغير j فإنه يمثل العمود الذي يقع فيه العنصر.

إن هذا الأسلوب في كتابة المصفوفة مفيد جداً في تمثيل المصفوفات ذات الرتب العالية فمثلاً يمكن كتابة مصفوفة من الرتبة (100×500) كما يلي :-

$$A = [a_{ij}] , i = 1,2,3, \dots, 100 , j = 1,2,3, \dots, 500$$

ملاحظة:

في المصفوفة المربعة من الرتبة n يسمى القطر الذي يحتوي العناصر $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ بالقطر الرئيسي للمصفوفة .

[4-2-4] بعض الانواع المهمة من المصفوفات

يوجد عدد من المصفوفات تكتسب أهمية خاصة في التطبيقات الرياضية ومنها ما يلي :-

(1) مصفوفة الصف (*row matrix*) وتدعى أيضاً متجه صف وهي مصفوفة من الرتبة $1 \times n$ أي إنها تحتوي صفاً واحداً وعدد من الأعمدة مثل :-

$$A = (2 \quad -5 \quad 3 \quad 1)_{1 \times 4}$$

(2) مصفوفة العمود (*column matrix*) وتدعى أيضاً متجه عمود وهي مصفوفة من الرتبة $m \times 1$ أي أنها تحتوي عموداً واحداً وعدداً من الصفوف مثل :-

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

(3) المصفوفة الصفرية (*zero matrix*) وهي مصفوفة جميع عناصرها تأخذ قيمة الصفر وهي تمثل العنصر المحايد لعملية الجمع على المصفوفات ذات الرتب المتساوية مثل :-

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \text{ أو } B = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)_{1 \times 4} \text{ أو } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \text{ وبعض الاحيان يرمز لها بالرمز } 0 .$$

(4) المصفوفة القطرية (*diagonal matrix*) وهي مصفوفة مربعة تأخذ جميع عناصرها قيمة الصفر عدا عناصر القطر الرئيسي $[a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n]$ فإنها تأخذ قيمة أخرى غير الصفر مثل :-

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}_{2 \times 2} , S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

5) مصفوفة الوحدة (*identity matrix*) وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها تأخذ قيمة الصفر عدا عناصر القطر الرئيسي $[a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n]$ فإنها تأخذ قيمة (1) فقط وتمثل العنصر المحايد لعملية الضرب على المصفوفات مثل

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \quad (\text{ويرمز لها بالرمز } I_2)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (\text{ويرمز لها بالرمز } I_3)$$

6) منقول المصفوفة (*Transpose Matrix*) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $(m \times n)$ فإن المصفوفة ذات الرتبة $(n \times m)$ والتي نحصل عليها من إستبدال صفوف المصفوفة بأعمدتها الواحد بديل الآخر تسمى منقول المصفوفة ويرمز لها A^T

مثال 2:- إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ مصفوفة من الرتبة 3×2 فإن منقول

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

المصفوفة هو

7) المصفوفة المتماثلة (*symmetrical matrix*): هي المصفوفة المربعة التي فيها :-

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{لجميع قيم } i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A = A^T \quad \text{والمصفوفة متماثلة تحقق العلاقة}$$

مثال 3:- المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ متماثلة لأن $A = A^T$

[3-4] تساوي مصفوفتين

تتساوى المصفوفتان A, B إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:-

1) تساوي رتبتي المصفوفتين

2) تساوي العناصر التي لها نفس الموقع في المصفوفة $a_{ij} = a_{ji}$ لجميع قيم $i, j = 1, 2, \dots, n$

مثال 4:- المصفوفتان A, B في أدناه متساويتان لتتحقق الشرطين الواردين في التعريف السابق .

$$A = \begin{pmatrix} 3+2 & 2 & -1 \times 3 \\ 1 & -2+2 & 0.7 \\ 2 & 2-6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{7}{10} \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال 5:- إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3x+1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفتين متساويتين جد قيمة x .

$$7 = 3x + 1 \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

الحل:-

مثال 6:- جد قيم x, y حيث $x, y \in \mathbb{R}$ لكل مما يلي :-

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ y+7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3x+2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} x+4 & 5 \\ 2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y & 5 \\ 2 & 3x \end{pmatrix}$$

الحل:- بما إن المصفوفتين متساويتان لذلك تتساوى العناصر التي تحتل الموقع ذاته فيهما وعليه يكون:-

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ y+7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3x+2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5 = 3x + 2 \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1$$

$$y + 7 = -1 \Rightarrow y = -1 - 7 \Rightarrow y = -8$$

$$2) \begin{pmatrix} x+4 & 5 \\ 2 & y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y & 5 \\ 2 & 3x \end{pmatrix}$$

$$x + 4 = 5y \Rightarrow x - 5y = -4 \quad \dots (1)$$

$$y + 2 = 3x \Rightarrow 3x - y = 2 \quad \dots (2)$$

وبضرب المعادلة (2) بالعدد (-5) نحصل على :-

$$x - 5y = -4 \quad \dots (1)$$

$$-15x + 5y = -10 \quad \dots (2) \quad \text{بالجمع}$$

$$-14x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$\therefore 1 - 5y = -4 \Rightarrow -5y = -5 \Rightarrow y = 1$$

تمارين (4-1)

1. حدد رتبة كل من المصفوفات الآتية:-

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 0 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. جد منقول كل من المصفوفات الواردة في السؤال الاول اعلاه .

3. أعط أمثلة لما يلي :-

(a) مصفوفة قطرية

(b) مصفوفة صفيرية من الرتبة 3×4

(c) مصفوفة متماثلة من الرتبة 3×3

4. أوجد قيمة x إذا كانت :- $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. بين أي من المصفوفات الآتية متماثلة :-

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

[4-4] جبر المصفوفات

[4-4-1] جمع وطرح المصفوفات

تجمع (أو تطرح) المصفوفات إذا كانت من نفس الرتبة وتكون عملية الجمع (أو الطرح) بجمع (أو بطرح) العناصر ذات المواقع المتناظرة بين المصفوفتين .

مثال 7:- إذا كانت $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & 15 \end{pmatrix}$$

لاحظ إن المصفوفة C الناتجة من عملية الجمع لها نفس رتبة المصفوفتين A, B

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

لاحظ إن المصفوفة D الناتجة من عملية الطرح لها نفس رتبة المصفوفتين A, B

(4-4-2) خواص جمع المصفوفات

(1) عمليتي الجمع والطرح غير معرفتين بين المصفوفات المختلفة في الرتب .
(2) خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع :- مجموع أي مصفوفة مع المصفوفة الصفريّة المساوية لها بالرتبة تساوي المصفوفة ذاتها .
(3) خاصية النظير الجمعي : إذا كانت A مصفوفة ما فإن $(-A)$ تسمى النظير الجمعي للمصفوفة A بحيث $A + (-A) = 0$ حيث 0 هي المصفوفة الصفريّة التي لها نفس رتبة المصفوفة A .
(4) خاصية الأبدال $A + B = B + A$
(5) خاصية التجميع :- إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات متساوية في الرتبة فإن $(A + B) + C = A + (B + C)$
(6) إذا كانت A و B مصفوفتين من نفس الرتبة فإن $(A + B)^T = A^T + B^T$

مثال 8: تحقق من صحة الخواص 2،3،4،5،6 باستخدام المصفوفات الآتية :-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



الحل :-

(1) خاصية العنصر المحايد لعملية الجمع

$$A + 0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A$$

(2) خاصية النظير الجمعي

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(3) خاصية الأبدال

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A + B = B + A$$

(4) خاصية التجميع

$$(A + B) + C = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$$

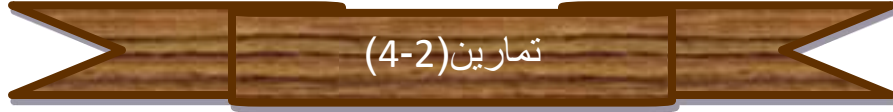
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$


(5) منقول مجموع مصفوفتين يساوي مجموع منقول كل منهما

$$(A + B)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A + B)^T = A^T + B^T$$



1. إذا كانت  $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفات الآتية (إذا كانت العملية المطلوب إجراؤها معرفة)

- a) $A + B$
- b) $A - B$
- c) $A + C$
- d) $C - A$
- e) $(B - A)^T$
- f) $A^T + B^T$

2. مستخدماً المصفوفات الواردة في السؤال الاول أثبت إن :-



$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

[4-4-3] ضرب المصفوفات بعدد ثابت

يمكن ضرب أي مصفوفة مهما كانت رتبته بعدد ثابت ويسمى هذا النوع من الضرب بالضرب القياسي (*Scalar Multiplication*) ويتم ذلك عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد المراد ضرب المصفوفة به.

مثال 9: (a) لتكن $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ فإن $-3A$ مصفوفة لها نفس رتبة A ونحصل



عليها كما يأتي:

$$-3A = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 6 & -3 \times 2 \\ -3 \times (-4) & -3 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -6 \\ 12 & -21 \end{pmatrix}$$

(b) لتكن $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ فإن $2B$ مصفوفة لها نفس رتبة B ونحصل

عليها كما يأتي :

$$2B = (2) \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 2 & 2 \times (-1) \\ 2 \times 0 & 2 \times 1 & 2 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

(4-4-4) ضرب المصفوفات ببعضها

نستطيع ضرب مصفوفتين B ، إذا كان عدد الأعمدة في إحدى المصفوفتين مساوٍ لعدد الصفوف في المصفوفة الأخرى ، وبشكل خاص فإن حاصل ضرب المصفوفتين A ، B يكون معرفاً إذا كانت عدد أعمدة المصفوفة A مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة B . فمثلاً إذا كانت $A_{2 \times 4}$ و $B_{4 \times 3}$ فإن حاصل ضربهما $A \cdot B$ مصفوفة رتبتهما 2×3 .

ملاحظة (1) :- تكون رتبة المصفوفة $A \cdot B$ الناتجة من عملية ضرب المصفوفتين $A_{m \times p}$ و $B_{p \times n}$ هي $m \times n$

ملاحظة (2): إذا كان عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A فإن المصفوفة الناتجة من عملية الضرب $B \cdot A$ تكون غير معرفة

مثال 10: المصفوفة A ذات الرتبة 3×2 والمصفوفة B ذات الرتبة 2×5 معرفة بينهما عملية الضرب $A \cdot B$ لأن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B وهو 2 وعليه تكون رتبة المصفوفة الناتجة مساوية لعدد أعمدة B مضروبة بعدد صفوف A أي (3×5) .

ولتوضيح فكرة ضرب المصفوفات نقول إن العنصر الموجود في الصف m والعمود n من مصفوفة حاصل الضرب هو العدد الناتج من جمع حواصل ضرب عناصر الصف m في المصفوفة الأولى بعناصر العمود n في المصفوفة الثانية . وتسهيلاً لهذه الفكرة فإننا سنتدرج في هذا المفهوم فنبداً أولاً بعملية ضرب صف بعمود.

[4-4-4-1] ضرب صف بعمود

عند إجراء عملية ضرب بين صف مثل $A_{1 \times n}$ وعمود $B_{n \times 1}$ فإن حاصل الضرب هو مصفوفة ذات عنصر وحيد حيث تكون رتبة المصفوفة الناتجة هي 1×1 ونحصل على هذا العنصر بجمع حاصل ضرب عناصر الصف للمصفوفة A بعناصر العمود للمصفوفة B بشكل متناظر وكما موضح في المثال الآتي :-

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1}, \quad A = (1 \ 2 \ 3)_{1 \times 3} \quad \text{مثال 11:}$$

$$A.B = (1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = [(1 \times 2) + (2 \times 0) + (3 \times 4)] = (2 + 0 + 12) = 14$$

أما عند إجراء عملية ضرب بين العمود $B_{n \times 1}$ والصف $A_{1 \times n}$ وفإن حاصل الضرب هو مصفوفة من الرتبة $(n \times n)$ ونحصل على هذه المصفوفة بضرب عناصر العمود للمصفوفة B بعناصر الصف للمصفوفة A بشكل متناظر وكما موضح أدناه :-

$$B.A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \cdot (1 \ 2 \ 3)_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{6 \times 1} \quad \text{المصفوفة } A = (3 \ 0 \ 2 \ 0 \ 4 \ 0)_{1 \times 6} \quad \text{المصفوفة } \quad \text{مثال 12:}$$

$$(A.B)_{1 \times 1} = [(3 \times 3) + (0 \times 1) + (2 \times 3) + (0 \times 1) + (4 \times 5) + (0 \times 1)] \\ = (9 + 0 + 6 + 0 + 20 + 0) = 35$$

[4-4-4-2] ضرب مصفوفة بمصفوفة أخرى

نحصل على عناصر حاصل ضرب مصفوفتين متوافقتين لعملية الضرب (أي عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوٍ لعدد صفوف المصفوفة الثانية) وفقاً للخطوات الآتية

$$C = A.B = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. C_{11} = حاصل جمع (عناصر الصف **الأول** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الأول** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

2. C_{12} = حاصل جمع (عناصر الصف **الأول** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثاني** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

3. C_{13} = حاصل جمع (عناصر الصف **الأول** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثالث** المقابلة لها من المصفوفة الثانية) وهكذا لبقية الأعمدة

ثم :-

1. C_{21} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثاني** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الأول** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

2. C_{22} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثاني** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثاني** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

3. C_{23} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثاني** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثالث** المقابلة لها من المصفوفة الثانية) وهكذا لبقية الأعمدة

ثم :-

1. C_{31} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثالث** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الأول** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

2. C_{32} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثالث** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثاني** المقابلة لها من المصفوفة الثانية)

3. C_{33} = حاصل جمع (عناصر الصف **الثالث** من المصفوفة الأولى × عناصر العمود **الثالث** المقابلة لها من المصفوفة الثانية) وهكذا لبقية الأعمدة

مثال 13: المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ والمصفوفة $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ تكون

عملية ضربهما كما يلي :

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times 1 \\ 3 \times (-1) + (-1) \times 5 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

ولكن A غير معرف لكون عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A

مثال 14: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ ، $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ جد $(A.B)$ ، $(B.A)$

$$(A.B) = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + (-1) \times 0 & 1 \times 3 + (-1) \times 5 \\ 2 \times (-1) + 0 \times 0 & 2 \times 3 + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} -1 \times 1 + 3 \times 2 & -1 \times (-1) + 3 \times 0 \\ 0 \times 1 + 5 \times 2 & 0 \times (-1) + 5 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

نلاحظ إن $A.B \neq B.A$

مثال 15: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ فإن $A.B$:-


$$(A.B) = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 9 \\ 2 \times 5 + 8 \times 9 \\ 4 \times 5 + 0 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

ونلاحظ إن $B.A$ غير معرف لعدم توافر شروط الضرب فيه .


تمارين (3-4)

1. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ ، $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 12 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ أجب ما يلي :-

- $A - 2B + C$
- $-2C + 3A$
- $B - A + 3C$
- $3(A + B)$
- $5.A^T + (-2B)^T$

2. إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $A = (2 \ 0 \ 4)$ ، إحصب إن أمكن :- 


- a) $A.B$
b) $B.A$

3. إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ، إحصب إن أمكن :- 


- a) $A.B$
b) $B.A$

4. جد قيمة كل من X, Y, Z, W في المصفوفات المتساوية الآتية :- 

- a) $\begin{pmatrix} 2X + 3 & 3Y - 6 \\ X - 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ Z & 2W - 6 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 3X & 10 \\ 2X + Z & 2Y - W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 2Y \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$

5. إذا كانت $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ، أثبت أن :- 

$$(A - B) = -(B - A)$$

6. إذا كانت $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ، 

جد المصفوفات الآتية (إن كانت العملية معرفة) .

- a) $(A.B)$
b) $(B.A)$
c) $(A.C)$
d) $(C.A)$
e) $(B.C)$
f) A^2
g) B^2
h) C^2
i) $(A.B)^T$
j) $A^T.B^T$
k) $B^T.A^T$
l) $(A + B)^T$

4-5-2] حساب قيمة المحددة المربعة (3 × 3)

الطريقة الاولى (طريقة الاسهم) :-

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ، يمكن إحتساب محدد المصفوفة A كما يلي :-

(1) أكتب العمودين الاول والثاني خارج المحدد وكما مبين أدناه :-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(2) مرر أسهم بعناصر المحدد كما يلي :-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(3) جد حاصل ضرب العناصر الثلاثة التي تقع على كل سهم

و نحصل على $\det(A)$ من العلاقة الآتية :-

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ملاحظة:- تستخدم هذه الطريقة فقط للمصفوفات المربعة من الرتبة

3×3

جد محدد المصفوفة $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

مثال 18:



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$\det(W) = [1 \times (-1) \times 0 + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times 5 \times 4] - [3 \times (-1) \times 3 + 4 \times 1 \times 1 + 0 \times 5 \times 2]$$

$$= [0 + 6 + 60] - [-9 + 4 + 0] = 66 + 5 = 71$$

الطريقة الثانية (طريقة التجزئة)

وفي هذه الطريقة يتم تجزئة المحددة المربعة (3 × 3) الى ثلاثة محددات صغيرة من الرتبة (2 × 2) عن طريق اختيار a_{11} وحذف صفه وعموده ثم اختيار a_{12} وحذف صفه وعموده ثم اختيار a_{13} وحذف صفه وعموده يلي ذلك تبسيط النتائج بالاستفادة من تعريف محدد المصفوفة من الرتبة (2 × 2) وعلى النحو الآتي :-

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13}$$

حيث تمثل M_{11} المحددة للعناصر المتبقية من حذف الصف الاول والعمود الاول من المحددة الاصلية و تمثل M_{12} المحددة للعناصر المتبقية من حذف الصف الاول والعمود الثاني من المحددة الاصلية و تمثل M_{13} المحددة للعناصر المتبقية من حذف الصف الاول والعمود الثالث من المحددة الاصلية

مثال 19: أحسب قيمة محددة المصفوفة الآتية:-

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

الحل:-

$$\det(Z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 - 6) - 2(3 - 4) + 3(9 - 2)$$

$$= -5 + 2 + 21 = 18$$

[3-5-4] بعض خواص المحددات

(1) إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف في المحددة تساوي صفراً فإن قيمة المحدد تساوي صفراً

مثال 20:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 0) + 3(0 - 0) + 4(0 - 0) = 0$$

(2) محددة أي مصفوفة مربعة تساوي محددة المصفوفة المنقولة لها أي:- $\det(A) = \det(A^T)$

مثال 21: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ فإن $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ ويكون :-

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times 0) = 2 - 0 = 2$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times 0) = 2 - 0 = 2$$

(3) إذا ضربنا كل عنصر من عناصر صف واحد فقط أو عمود واحد فقط للمحددة بعدد حقيقي فإن قيمة المحددة الناتجة يساوي حاصل ضرب ذلك العدد بالمحددة الأصلية .

مثال 22: إذا كانت $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ فإن $\det(A) = (1 \times 3) - (2 \times 1) = 1$

لو ضربنا الصف الأول بالعدد 5 فإن المحددة ستكون بالشكل $B = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det B = (5 \times 3) - (10 \times 1) = 15 - 10 = 5 = 5\det(A)$$

كما إننا لو ضربنا العمود الثاني مثلاً بالعدد (-2) فإن المحددة ستكون بالشكل $C = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$

ويكون :-

$$\det C = [1 \times (-6)] - [(-4) \times 1] = -6 + 4 = -2 = -2\det(A)$$

(4) إذا تبادلت صفان أو عمودان لمواقعهما في المحددة فإن إشارة المحددة فقط هي التي سوف تتغير وتبقى القيمة نفسها .

مثال 23: إذا كانت $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$ فإن $\det(A) = (2 \times 6) - (5 \times 1) = 7$

لو إستبدلنا الصف الأول بالصف الثاني فإن المحددة ستكون بالشكل $B = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det B = (1 \times 5) - (2 \times 6) = 5 - 12 = -7$$

ولو إستبدلنا العمود الأول بالعمود الثاني فإن المحددة ستكون بالشكل $C = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$ ويكون

$$\det C = (5 \times 1) - (2 \times 6) = 5 - 12 = -7$$

(5) إذا تماثل صفان أو عمودان في محددة فإن قيمة المحددة تساوي صفراً .

مثال 24: جد قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ الحل :-

$$1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 3) - 1(0 - 3) + 2(0 - 0) = -3 + 3 + 0 = 0$$

وبالإمكان الاستغناء عن هذه الخطوات بملاحظة كون العمودين الأول والثاني متماثلين والاجابة بان قيمة المحددة تساوي صفر مباشرة .

[4-6] حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات

في هذا البند سوف نتطرق الى حل معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام المحددات وكذلك حل نظام خطي مؤلف من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات باستخدام المحددات وطريقة كرايمر (Gramer's method).

[4-6-1] حل معادلتين خطيتين بمتغيرين باستخدام المحددات

لحل المعادلتين الخطيتين بالمتغيرين x ، y وليكونا :-

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

وبصيغة المصفوفة :-

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$
$$A \quad X = B$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ عندما}$$

نتبع الخطوات الآتية:-

1. نستخرج $\det(A)$ أي محددة معاملات المتغيرين x ، y وكما يلي :-

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

وفي حالة كون قيمة $\det(A)$ تساوي صفرأ فإنه ليس للمعادلتين حل في مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} أي إن مجموعة الحل تكون مجموعة خالية .

2. نستخرج $\det(A_x)$ وهي المحددة A ذاتها لكن بعد إستبدال عمودها الاول بعمود المصفوفة B في الطرف الايمن وكما يلي :-

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

3. نستخرج $\det(A_y)$ وهي المحددة A ذاتها لكن بعد إستبدال عمودها الثاني بعمود المصفوفة B في الطرف الايمن وكما يلي :-

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

4. نستخدم طريقة كرايمر لأيجاد قيم المتغيرين x, y في المعادلتين وكما يلي :-

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} , \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

مثال 25: حل المعادلتين الآتيتين بطريقة المحددات (طريقة كرايمر) :



$$\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ 3x - 4y &= -25 \end{aligned}$$

الحل :-

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-4)] - (1 \times 3) = 8 - 3 = 5$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -25 & -4 \end{vmatrix} = [5 \times (-4)] - [1 \times (-25)] = -20 + 25 = 5$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-25)] - (5 \times 3) = 50 - 15 = 35$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{35}{5} = 7$$

$$S.s = \{(1,7)\}$$

مثال 26: حل المعادلتين الآتيتين بطريقة المحددات (طريقة كرايمر) :



$$\begin{aligned} -2x + y &= 5 \\ x - 0.5y &= -2.5 \end{aligned}$$

الحل :-

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{vmatrix} = [(-2) \times (-0.5)] - (1 \times 1) = 1 - 1 = 0$$

وحيث إن $\det(A) = 0$ فإن $S.s = \phi$ أي إنه ليس للمعادلتين حل في مجموعة الاعداد الحقيقية \mathbb{R} .

[4-6-2] حل نظام خطي مؤلف من ثلاثة معادلات بثلاثة متغيرات باستخدام المحددات

نستخدم الأسلوب ذاته الذي استخدمناه لحل المعادلتين الخطيتين بمتغيرين وكما يلي :-

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \det(A_x) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \det(A_z) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$



مثال 27: حل النظام الخطي المؤلف من المعادلات الثلاثة الآتية بطريقة المحددات (طريقة



كرايمر)

$$x - 2y + 3z = -1$$

$$-2x + y - 5z = 1$$

$$3x + 3y + 4z = 2$$

الحل:-

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \quad X = B$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(4 + 15) + 2(-8 + 15) + 3(-6 - 3) = 19 + 14 - 27 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1(4 + 10) + 2(4 + 10) + 3(3 - 2) = -19 + 28 + 3 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_y) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1(4 + 10) + 1(-8 + 15) + 3(-4 - 3) = 14 + 7 - 21 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A_z) &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(2 - 3) + 2(-4 - 3) - 1(-6 - 3) = -1 - 14 + 9 = -6 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{0}{6} = 0, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\therefore S.s = \{(2, 0, -1)\}$$

تمارين (4-4)

1. احسب قيمة المحددات الآتية:-



$$a) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 11 & 6 \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \quad d) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. جد قيمة x التي تحقق ما يلي :-



$$a) \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 1 \\ 1 & 4-x & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

3. جد مجموعة حل كل من أنظمة المعادلات الخطية الآتية باستخدام المحددات (طريقة كرايمر)



a)

$$2x + 3y = 4$$

$$x - y = -3$$

b)

$$3x + 2y = 12$$

$$5x - 3y = 1$$

c)

$$2x + 8y = 4$$

$$x + 4y = 14$$

d)

$$x + y + z = 6$$

$$2x + 3y + z = 11$$

$$3x + 2y + z = 13$$

(e)

$$x + y + z = 6$$

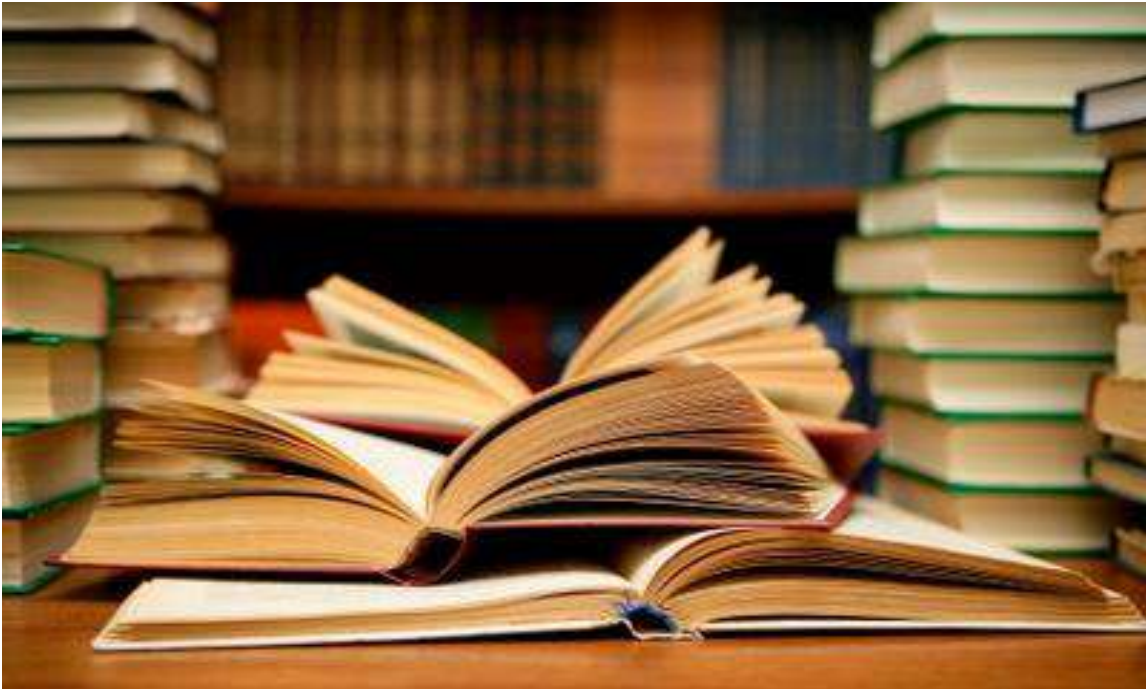
$$2x + 3y + z = 11$$

$$-x - 2y = -5$$

الفصل الخامس

علم الاحصاء

مقاييس النزعة المركزي



الفصل الخامس

علم الاحصاء

مقاييس النزعة المركزية

الأهداف السلوكية:

يجب على الطالب في نهاية الفصل هذا أن يكون قادراً على أن :-

1. يتعرف على أنواع الجداول ويتمكن من أنشائها .
2. يفهم ماهية جداول التوزيع التكراري والغاية من أنشائها .
3. يلم بوسائل التمثيل البياني لعرض البيانات الأحصائية .
4. يتعرف على مفهوم المدى ويتمكن من استخراجة.
5. يتعرف على مفهوم الانحراف المتوسط ويتمكن من استخراجة.
6. يتعرف على مفهوم التباين ويتمكن من استخراجة.
7. يتعرف على مفهوم الانحراف المعياري ويتمكن من استخراجة.
8. يتعرف على مفهوم الخطأ المعياري ويتمكن من استخراجة
9. يتعرف على مفهوم معامل الإختلاف ويتمكن من استخراجة



الفصل الخامس
علم الاحصاء
مقاييس النزعة المركزية

(5-1) أنواع الجداول.

(5-2) جداول التوزيع التكراري.

(5-3) التمثيل البياني.

(5-3-1) العرض البياني في حالة المتغير الكمي

(5-3-2) العرض البياني في حالة المتغير النوعي

(5-4) التشتت أو الاختلاف.

(5-4-1) مقاييس التشتت المطلق .

(5-4-1-1) المدى .

(5-4-1- 2) الإنحراف المتوسط .

(5-4-1- 3) التباين .

(5-4-1-4) الإنحراف المعياري .

(5-4-1-5) الخطأ المعياري (الخطأ القياسي) .

(5-4-2) مقاييس التشتت النسبي .

(5-4-2-1) معامل الاختلاف



(5-1) أنواع الجداول

بعد جمع البيانات الإحصائية الأولية (*Raw data*) لدراسة ظاهرة معينة وفق الأساليب والطرق التي ذكرناها سابقا فإنه غالبا لا يمكن الاستفادة منها وهي على الصورة هذه، لذا فغالبا ما توضع في جداول مبسطة أو يعبر عنها بصورة اشكال ورسوم بيانية لتسهيل عملية دراستها وتحليلها.

العرض الجدولي (*Tabular Presentation*)

هناك نوعان رئيسيان من الجداول الإحصائية وهما:

1-الجدول البسيط 2-الجدول المركب

1-الجدول البسيط:

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفة واحدة ويتألف من عمودين. الأول يمثل تقسيمات الصفة أو الظاهرة الى فئات أو مجموعات والثاني يبين عدد المفردات التابعة لكل فئة أو مجموعة. الجدول (5-1-1) , (5-1-2) يمثل نموذجا للجدول البسيط.

جدول (5-1-1) توزيع الدرجات الفصلية لمادة الإحصاء للصف الأول الزراعي.

عدد الطلبة	فئات الدرجات
2	31-40
4	41-50
7	51-60
12	61-70
18	71-80
6	81-90
1	91-100

جدول (5-1-2) جدول توزيع عدد الطلبة للمرحلة الأولى في كلية الزراعة حسب الأقسام العلمية

عدد الطلبة	القسم العلمي
70	علوم التربة
50	علوم المحاصيل
60	وقاية المزروعات
50	البستنة
30	الصناعات الغذائية
25	الارشاد الزراعي
20	الاقتصاد الزراعي
35	المكننة الزراعية

2-الجدول المركب:

وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات وفق صفتين أو ظاهرتين أو أكثر في الوقت نفسه. فتكون الفئات أو المجاميع للصفة أو الظاهرة الأولى تمثل الصفوف والصفة أو الظاهرة الثانية تمثل الأعمدة ، بينما تمثل الخلايا (المربعات) الداخلية أعداد المفردات للصفات أو التكررات هذه والجدول (5-1-3) يمثل نموذج للجدول المركب المتكون من صفتين.

جدول(5-1-3) جدول توزيع عدد الطلبة في كلية الزراعة حسب المراحل الدراسية والأقسام العلمية

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	المرحلة الثالثة	المرحلة الرابعة	القسم العلمي
70	45	34	36	علوم التربة
50	40	37	46	علوم المحاصيل
60	55	45	48	وقاية المزروعات
50	56	44	36	البستنة
30	25	28	32	الصناعات الغذائية
25	18	20	24	الارشاد الزراعي
20	25	18	19	الاقتصاد الزراعي
35	18	17	12	المكننة الزراعية

والان سنشرح بالتفصيل كيفية إنشاء أو تكوين جدول من الجداول البسيطة الكثيرة والشائعة الاستعمال ويدعى بجدول التوزيع التكراري.

(5-2) جداول التوزيع التكراري (Frequency Table)

تنظم وتلخص البيانات الأحصائية سواء كانت وصفية أم كمية فيما يسمى بالتوزيع التكراري (*Frequency Distribution*) وهو عبارة عن جدول يلخص البيانات الخام فيوزعها على فئات ويحدد عدد الأفراد الذين ينتمون الى كل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة ويرمز له بالرمز f ، ولأتمام ذلك ينبغي ان يصمم جدولاً آخر يسمى بجدول تفرغ البيانات الأحصائية. وهو يتكون من ثلاثة اعمدة. العمود الأول يكتب فيه الصفة للبيانات الوصفية أو الفئة للبيانات الكمية ، وفي العمود الثاني توضع العلامات وهي عبارة عن حزم مكونة من خمسة خطوط ، أربعة منها رأسية والخامس مائل يربط الخطوط الأربعة الرأسية وبذلك تصبح الحزمة على الصورة (\equiv) وفي العمود الثالث يكتب مجموع العلامات أمام كل صفة أو فئة ومجموع العلامات هذه في كل فئة يسمى التكرار لهذه الصفة أو الفئة.

هناك أنواع متعددة من جداول التوزيع التكراري أهمها:

- 1- جدول التوزيع التكراري البسيط
 - 2- جدول التوزيع التكراري النسبي
 - 3- جدول التوزيع التكراري المتجمع
- (a) جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد
(b) جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

1- جدول التوزيع التكراري البسيط (Simple Frequency table)

تعريف جدول التوزيع التكراري البسيط

هو جدول بسيط يتكون من عمودين :
الاول : تقسم فيه قيم المتغير على اقسام أو مجموعات تسمى الفئات (*Classes*)
الثاني : يبين مفردات كل فئة ويسمى بالتكرار (*Frequency*)

بعض التعاريف المهمة

البيانات غير المبوبة (*Ungrouped Data*)

وهي البيانات الخام الأولية أو الاصلية (*Raw data*) التي جمعت ولم تبوب.

البيانات المبوبة (*Grouped Data*)

وهي البيانات التي تم تبويبها وتنظيمها في جدول التوزيع التكراري.

الفئات (Classes)

وهي الفترة التي نختارها لتقسيم بيانات المتغير على مجموعات متساوية بحيث تكون لكل قسم أو صنف صفة مميزة.

حدود الفئات (Class Limit)

لكل فئة حدان، حد أدنى وحد أعلى.

طول الفئة (Class Length)

وهو مقدار المدى بين حدي الفئة.

مركز الفئة (Class Midpoint)

منتصف المدى بين حدي الفئة.

تكرار الفئة (Class Frequency)

وهي عدد المفردات أو القيم التي تقع تحت مدى تلك الفئة ويرمز لها بالرمز f_i

خطوات تكوين جدول التوزيع التكراري البسيط :

a. في حالة البيانات الوصفية

(1) إنشاء جدول تفرغ البيانات الذي يتكون من ثلاثة أعمدة، الأول يتضمن الصفة للبيانات الوصفية والثاني للعلامات والثالث للتكرار لكل صفة.

(2) إنشاء جدول التوزيع التكراري البسيط الذي يتضمن عمودين، الأول للصفات الوصفية والثاني لتكرار الفئات.

مثال 1: إذا كانت لدينا بيانات أنواع 40 شجرة من الحمضيات في أحد البساتين

برتقال	نارنج	برتقال	ليمون	لالنكي
نارنج	لالنكي	ليمون	نارنج	ليمون
برتقال	برتقال	ليمون	لالنكي	ليمون
برتقال	ليمون	برتقال	نارنج	برتقال
ليمون	برتقال	ليمون	نارنج	لالنكي

و أولاً: نعمل جدول تفريغ البيانات كالاتي: -

جدول (5-2-1) جدول تفريغ البيانات لأشجار الحمضيات

التكرار	العلامات	أنواع أشجار الحمضيات
6		نارنج
15		برتقال
11		ليمون
8		لأنكي

ثانيا: جدول التوزيع التكراري لأشجار الحمضيات

جدول (5-2-2) التوزيع التكراري لأشجار الحمضيات

التكرار	أنواع أشجار الحمضيات
6	نارنج
15	برتقال
11	ليمون
8	لأنكي

b. في حالة البيانات الكمية

(1) ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً

(2) حساب قيمة المدى حيث ان :- $\text{قيمة المدى} = \text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة}$

(3) اختيار عدد مناسب للفئات:

هناك عدة طرق حسابية تقريبية لإيجاد عدد الفئات سنذكرها للعلم فقط أهمها:

طريقة سترجس Sturges: عدد الفئات = $1 + (3.3 + \text{لوغارتم عدد المفردات})$

طريقة يول Yule: عدد الفئات = $2.5 \times \text{الجذر الرابع لعدد المفردات}$

ولكل من الطريقتين ميزات وعيوب ولن نستعمل أيّاً منها في الوقت الحاضر بل سنختار الفئات اختياراً ويفضل ان يكون العدد بين خمس الى خمس عشرة فئة.

(4) حساب طول الفئة: -

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$ ويفضل تقريبها الى أقرب عدد صحيح

(5) حساب مركز الفئة:

(6) $\text{بداية الفئة} + \text{نهاية الفئة}$

$\frac{\text{مركز الفئة}}{2} =$

2

مثال 2: البيانات الآتية تمثل درجات 40 طالباً في مادة الرياضيات

84	36	87	42	55	45	72	65
91	62	76	88	28	79	66	58
61	64	56	93	83	67	78	29
80	73	84	71	33	63	74	46
50	51	58	64	74	94	85	25

الحل: ترتيب البيانات تصاعديا أو تنازليا

46	45	42	36	33	29	28	25
62	61	58	58	56	55	51	50
72	71	67	66	65	64	64	63
83	80	79	78	76	74	74	73
94	93	91	88	87	85	84	84

المدى : $94 - 25 = 69$

عدد الفئات : 7 (أختياري)

طول الفئة : $9.86 = \frac{69}{7}$ تقرب الى أقرب عدد صحيح وهو (10)

جدول (5-2-3) جدول تفرغ البيانات لدرجات مادة الرياضيات

التكرار	العلامات	مركز الفئات	الفئات
4		29.5	25 - 34
2		39.5	35 - 44
4		49.5	45 - 54
9	/	59.5	55 - 64
8	/	69.5	65 - 74
7	/	79.5	75 - 84
6	/	89.5	85 - 94
40			المجموع

جدول (5-2-4) التوزيع التكراري البسيط لدرجات مادة الرياضيات

التكرار	الفئات
4	25 - 34
2	35 - 44
4	45 - 54
9	55 - 64
8	65 - 74
7	75 - 84
6	85 - 94
40	المجموع

2-جدول التوزيع التكراري النسبي (Relative Frequency Distribution)

وهو جدول يبين الأهمية النسبية لكل فئة. ويحسب التكرار النسبي لكل فئة بالطريقة الآتية:

$$\frac{f_i}{\sum f_i} = \frac{\text{تكرار تلك الفئة}}{\text{المجموع الكلي للتكرارات}} = \text{التكرار النسبي لأي فئة}$$

وعادة يوضع التكرار النسبي كنسبة مئوية وذلك بضرب كل تكرار نسبي بالعدد 100 وكما مبين في الجدول (5-2-5) الآتي:-

جدول (5-2-5) جدول التوزيع التكراري النسبي لدرجات مادة الرياضيات

الفئات	التكرار	التكرار النسبي	التكرار المئوي %
25 – 34	4	0.100	10
35 – 44	2	0.050	5
45 – 54	4	0.100	10
55 – 64	9	0.225	22.5
65 – 74	8	0.200	20
75 – 84	7	0.175	17.5
85 – 94	6	0.150	15
المجموع	40	1.000	100

3-جدول التوزيع التكراري المتجمع *Cumulative Frequenc Table*

في بعض الأحيان قد تكون هناك حاجة الى معرفة عدد القيم أو المفردات التي تقل أو تزيد عن قيمة محددة، والجدول التي تحوي على مثل المعلومات هذه تدعى بالجدول التكرارية المتجمعة، وهناك نوعان من هذه الجداول

a. جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

b. جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

a. جدول التوزيع التكراري المتجمع الصاعد

وهو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تقل قيمتها عن الحد الأدنى لفئة معينة، ويتكون من عمودين. العمود الأول نكتب فيه حدود الفئات كما موضح في الجدول (5-2-6). والعمود الثاني نكتب فيه التكرار التجميعي التصاعدي بالشكل الآتي:

تكرار ما قبل الفئة الأولى = f_0 = صفر

تكرار الفئة الأولى = f_1

تكرار الفئة الثانية = $f_1 + f_2$

تكرار الفئة الثالثة = $f_1 + f_2 + f_3$

وهكذا بحيث ان التكرار التجميعي التصاعدي للفئة الاخيرة = Σf_i

جدول (5-2-6) جدول التوزيع التكراري التجميعي التصاعدي لدرجات مادة الرياضيات.

حدود الفئات	التكرار التجميعي التصاعدي
اقل من 25	صفر
اقل من 35	4
اقل من 45	6
اقل من 55	10
اقل من 65	19
اقل من 75	27
اقل من 85	34
اقل من 95	40

b. جدول التوزيع التكراري المتجمع النازل

وهو الجدول الذي يعطينا عدد المفردات التي تزيد قيمتها عن الحد الادنى لفئة معينة، ويتكون من عمودين. العمود الأول نكتب فيه حدود الفئات والعمود الثاني نكتب فيه التكرار التجميعي التنازلي كما موضح في الجدول (5-2-7). بالطريقة الآتية:

تكرار الفئة الأولى = مجموع التكرارات = Σf_i

تكرار الفئة الثانية = مجموع التكرارات - تكرار الفئة الأولى

$$\Sigma f_i - f_1 =$$

تكرار الفئة الثالثة = $\Sigma f_i - f_1 - f_2$

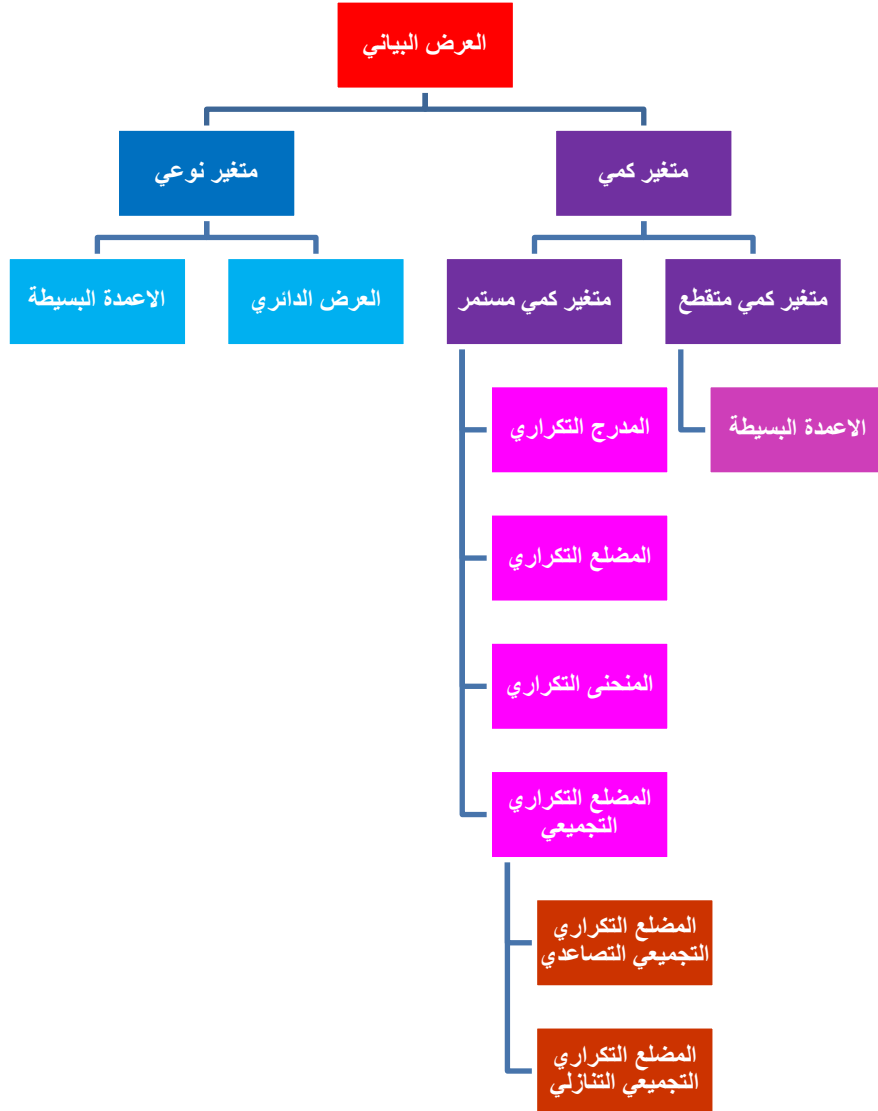
وهكذا بحيث ان التكرار التجميعي التنازلي للفئة الاخيرة = صفر

جدول (5-2-7) جدول التوزيع التكرار بالتجميعي التنازلي لدرجات مادة الرياضيات.

حدود الفئات	التكرار التجميعي التصاعدي
25 فأكثر	40
35 فأكثر	36
45 فأكثر	34
55 فأكثر	30
65 فأكثر	21
75 فأكثر	13
85 فأكثر	6
95 فأكثر	صفر

(5-3) التمثيل البياني (Graphic Presentations)

بالرغم من أن التوزيع التكراري أساسي وفعال في إظهار طبيعة البيانات وعلاقتها إلا أن الرسم البياني يبين طبيعة البيانات وأهميتها بصورة أسرع للقارئ وبطريقة سهلة وجذابة وفعالة تساعد على فهم واستيعاب قيم الظاهرة أو الصفة للمتغير تحت الدراسة ومقارنتها مع بعضها، وتستخدم أنواع مختلفة للعرض البياني حسب نوعية المتغير المدروس. كما هو موضح في الشكل (5-3-1) أدناه .



شكل (5-3-1) مخطط لطريقة التمثيل البياني حسب نوع المتغير

(1-3-5) العرض البياني في حالة المتغير الكمي

(a) العرض البياني في حالة المتغير الكمي المتقطع

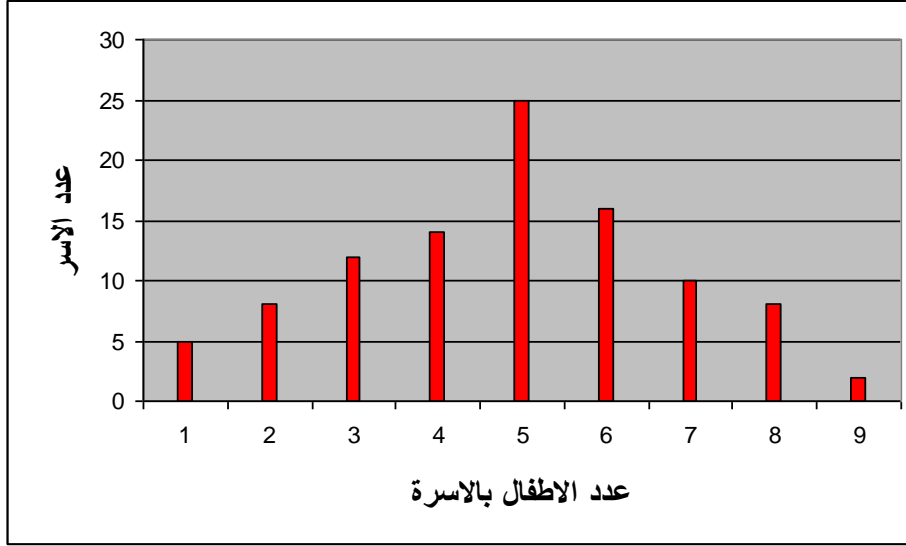
وهو المتغير الذي يأخذ أعداداً صحيحة فقط مثل عدد أفراد الأسرة، عدد الطلبة، عدد أشجار النخيل، عدد الأبقار في مزرعة ما ... الخ. وهنا يمكن استخدام الأعمدة البسيطة، وهي عبارة عن أعمدة بسيطة تتناسب أطوالها مع التكرار المقابل لقيمة العينة للمتغير المدروس.

مثال 3: يبين الجدول (1-3-5) عدد الأطفال في العائلة لعينة تكون من 100 أسرة، المطلوب عرض البيانات هذه بطريقة العرض المناسب البسيط.

جدول (1-3-5) جدول بيانات عدد الاطفال في كل اسرة

عدد الأسر	عدد الأطفال في كل أسرة
5	1
8	2
12	3
14	4
25	5
16	6
10	7
8	8
2	9
100	المجموع

الحل: أفضل وأبسط طريقة لعرض البيانات هذه هي استعمال الأعمدة البسيطة

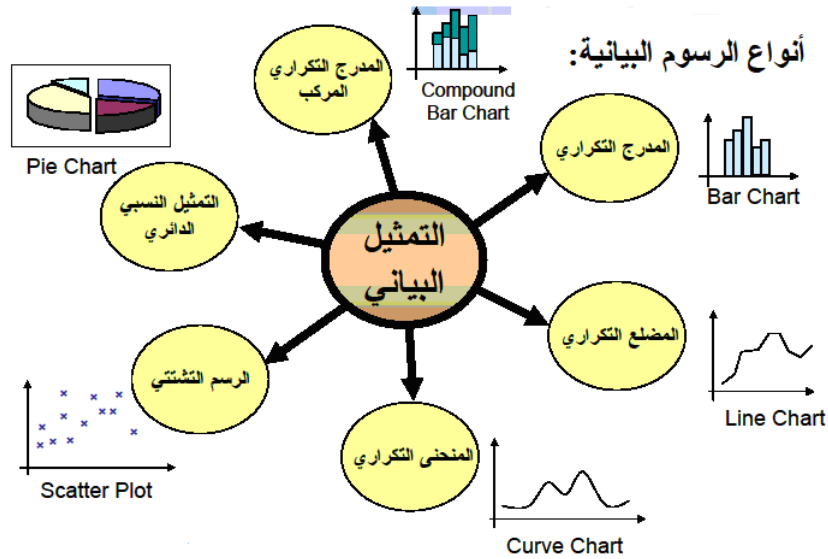


شكل (2-3-5) الرسم البياني بطريقة الأعمدة البسيطة لعدد الاطفال في الأسرة

(b) العرض البياني في حالة المتغير الكمي المستمر

المتغير المستمر وهو المتغير الذي يمكن أن يأخذ أي قيمة بين قيمتين معينتين، وكأمثلة عن المتغيرات المستمرة: الطول، الوزن، الزمن، السرعة... الخ. وهنا يمكن استخدام الأشكال الآتية:

- (1) المدرج التكراري (*Frequency Histogram*)
- (2) المضلع التكراري (*Frequency Polygon*)
- (3) المنحنى التكراري (*Frequency Curve*)
- (4) المضلع التكراري المتجمع (*Cumulative Frequency Polygon*)



شكل (3-3-5) أنواع الرسوم البيانية

(1) المدرج التكراري (Frequency Histogram)

وهو عبارة عن مستطيلات متلاصقة طول كل منها يتناسب مع التكرار المقابل، وقاعدة كل منها تساوي طول الفئة المقابلة. لأجل تمثيل البيانات بالمدرج التكراري يجب أولاً رسم محورين متعامدين، الأفقي منها يمثل الفئات والرأسي يمثل التكرارات، وعلينا أن نجزي المحور الأفقي إلى وحدات متساوية ونعين عليه الحدود الحقيقية للفئات ونجزي المحور الرأسي على عدد التكرارات الواردة في الجدول.

والمدرج التكراري عبارة عن تمثيل كل فئة من الفئات بمستطيل تمثل قاعدته الحدود الحقيقية لتلك الفئات وأرتفاعه يساوي التكرار المقابل لها ، ومن الملاحظ أن الحد الأعلى الحقيقي للفئة الأولى هو نفس الحد الأدنى الحقيقي للفئة الثانية ، وبذا ترى جميع المستطيلات متلاصقة.

مثال 4: اخذت عينة متكونة من 100 دجاجة بعمر 45 يوماً ، أخذت من أحد حقول الدواجن والجدول (5-3-2) يبين التوزيع التكراري لأوزان الدجاج بالغم.

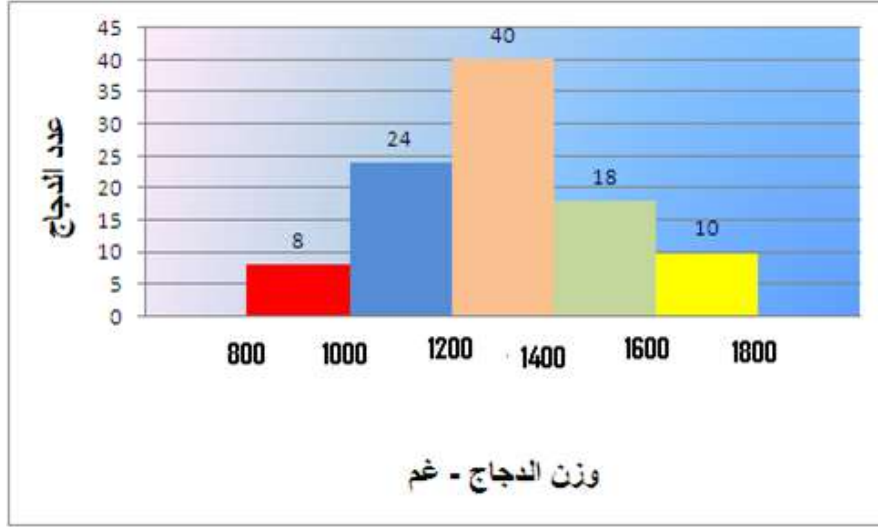
فئات الوزن	التكرار
800-1000	8
1000-1200	24
1200-1400	40
1400-1600	18
1600-1800	10
المجموع	100

جدول (5-3-2) جدول التوزيع التكراري لأوزان الدجاج (غم)

الحل: لرسم المدرج التكراري يتم إتباع الخطوات الآتية:

1. رسم محورين متعامدين، الرأسي يمثل التكرارات، والأفقي يمثل الأوزان .
2. كل فئة تمثل بعمود أرتفاعه هو تكرار الفئة، وطول قاعدته هو طول الفئة .
3. كل عمود يبدأ من حيث أنتهى به عمود الفئة السابقة.

والشكل (5-3-4) أدناه يبين المدرج التكراري لأوزان الدجاج



الشكل (5-3-4) المدرج التكراري لأوزان الدجاج

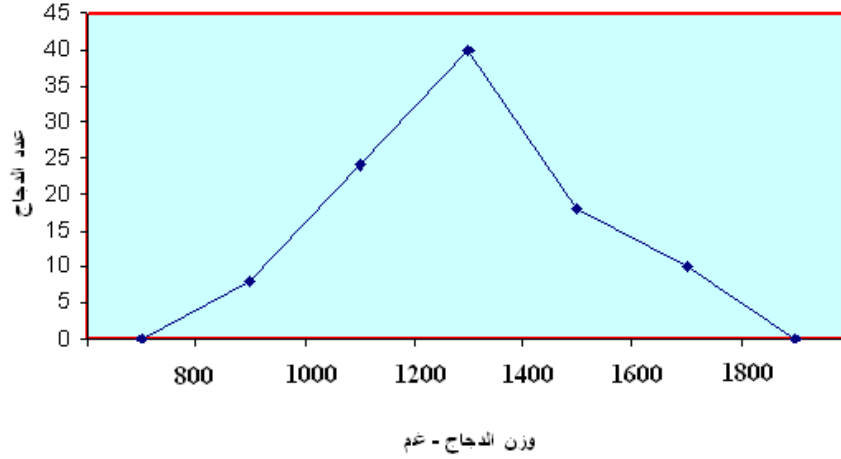
(2) المضلع التكراري (Frequency polygone)

هو مجموعة قطع مستقيمة متصلة ومنكسرة تتحدد بنقاط إحداثياتها مركز الفئة والتكرارات المقابلة. ملاحظة: الخط المنكسر يمثل المضلع التكراري، حيث أن المساحة التي تقع تحت المضلع التكراري تساوي المساحة التي تقع تحت المدرج التكراري، وحتى نحافظ على المساحة التي تقع أسفل المضلع هذا، نقوم بقفل المضلع بان نصل بداية المضلع بالمحور الأفقي بمركز فئة (خيالية) واقعة الى يسار أول فئة تكرارها صفراً. ونصل نهاية المضلع بالمحور الأفقي بمركز فئة (خيالية) واقعة الى يمين آخر فئة تكرارها أيضاً صفراً.

لرسم بيانات الجدول (5-3-2) نقوم بما يلي:

- 1- نقوم برسم المحور الأفقي والعمودي.
- 2- تدرج المحور الأفقي الى أقسام متساوية بحيث يشمل على جميع مراكز الفئات، ويقسم المحور العمودي الى أقسام متساوية بحيث تشمل كل التكرارات.
- 3- وضع نقطة امام مركز كل فئة، وارتفاعها يعادل تكرار تلك الفئة.
- 4- توصيل تلك النقاط بخطوط مستقيمة.

والشكل التالي يمثل المضلع التكراري لبيانات الجدول (5-3-2)

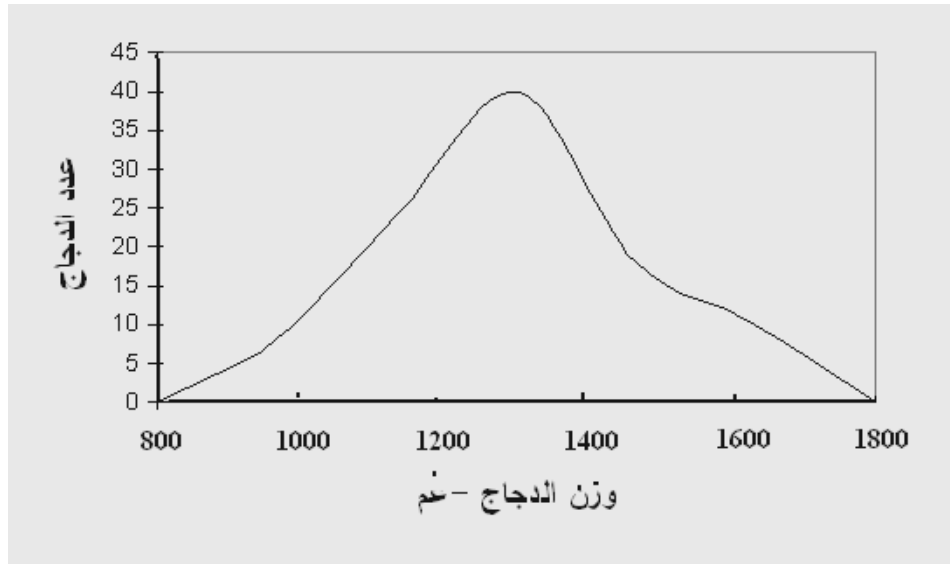


شكل (5-3-5) المصنع التكراري لبيانات الجدول 5-3-2

(3) المنحنى التكراري (Frequency curve)

باتباع الخطوات السابقة نفسها المتبعة في رسم المصنع يمكن رسم المنحنى التكراري، لكن يتم تمهيد الخطوط المنكسرة في شكل منحنى ليمر بأكثر عدد من النقاط على مراكز الفئات والتي ارتفاعاتها تمثل تكرارات تلك الفئات.

وعادة يقفل المنحنى التكراري بان نصل بدايته بالحد الأدنى للفئة الأولى ونهايته بالحد الأعلى للفئة الأخيرة. وتكون مساحة المنحنى مكافئة (وليست مساوية) للمصنع التكراري. كما في الشكل (5-3-6)



شكل (5-3-6) المنحنى التكراري لبيانات الجدول (5-3-2)

(4) المضلع التكراري المتجمع (Cumulative Frequency Polygon)

لتمثيل التكرار التجميبي بيانيا نستخدم المضلع التكراري التجميبي، وهو عبارة عن خطوط متكسرة تصل بين نقاط واقعة فوق الحدود الحقيقية للفئات وعلى ارتفاع تمثل التكرار التجميبي. وهناك نوعان من المضلع التكراري المتجمع:

أولاً- المضلع التكراري التجميبي الصاعد

ثانياً- المضلع التكراري التجميبي النازل

أولاً- المضلع التكراري التجميبي التصاعدي

ولرسم المضلع التكراري التجميبي التصاعدي نتبع الخطوات الآتية:

- 1- رسم المحور الأفقي والعمودي.
- 2- تدرج المحور الأفقي الى أقسام متساوية تشمل على جميع حدود الفئات ويقسم المحور العمودي الى أقسام متساوية حيث تشتمل على أكبر التكرارات التجميبيية وهي المجموع الكلي للتكرارات.
- 3- وضع علامة أمام كل حد فئة ارتفاعها يعادل التكرار التجميبي التصاعدي لذلك الحد.
- 4- توصيل تلك النقاط بخطوط مستقيمة.

مثال 5: ارسم المضلع التكراري التجميبي التصاعدي للجدول (2-3-5) الآتي:

جدول (2-3-5) توزيع تكراري لأوزان 100 دجاجة.

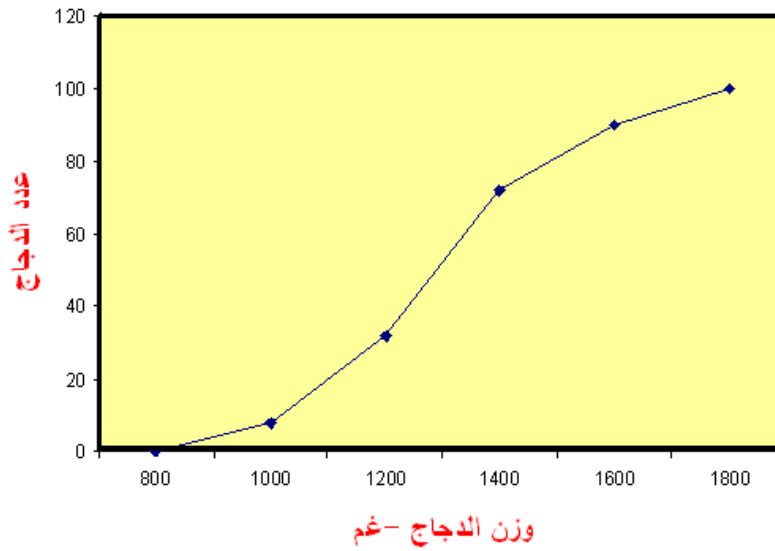
التكرار	فئات الوزن
8	800-1000
24	1000-1200
40	1200-1400
18	1400-1600
10	1600-1800
100	المجموع

الحل: لتكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تقل عن كل حد من حدود الفئات. وكما يلي

جدول (5-3-3) جدول التكرار التجميعي التصاعدي

فئات الوزن	التكرار التجميعي التصاعدي
أقل من 800	0
أقل من 1000	8
أقل من 1200	32
أقل من 1400	72
أقل من 1600	90
أقل من 1800	100
المجموع	100

ثم رسم المثلث التكراري التجميعي التصاعدي وكما يلي:



شكل (5-3-7) المثلث التكراري التجميعي التصاعدي لبيانات الجدول (5-3-3)

ثانياً- المضلع التكراري التجميعي التنازلي

ويرسم بنفس طريقة المضلع التكراري التجميعي التصاعدي ما عدا كون ارتفاع النقاط هنا هو التكرار التجميعي التنازلي، ولذلك يبدأ المضلع التكراري التجميعي التنازلي من أعلى نقطة (مجموع التكرارات الكلي) وينتهي بالصفر أي عكس المضلع التكراري التجميعي التصاعدي تماماً.

مثال6: ارسم المضلع التكراري التجميعي التنازلي للجدول (5-3-3)

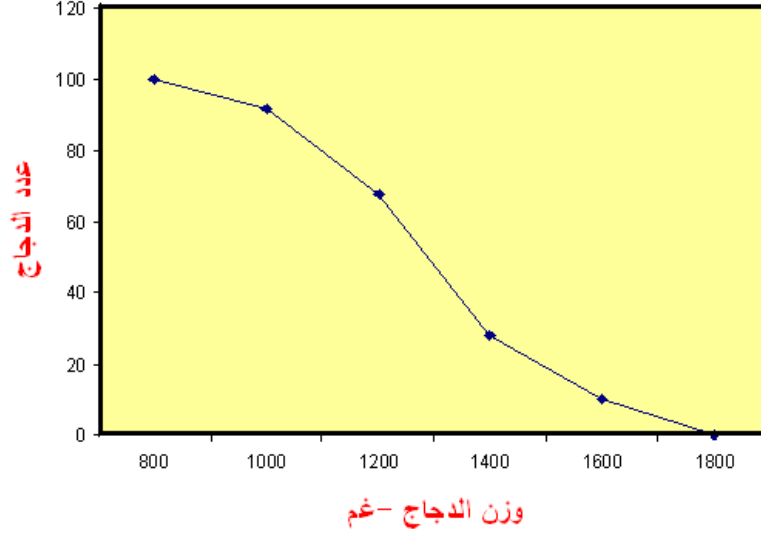
الحل: -

لتكوين الجدول التكراري المتجمع التنازلي، يتم حساب مجموع التكرارات (عدد القيم) التي تزيد عن كل حد من حدود الفئات. وكما يلي

جدول (5-3-4) جدول التكرار التجميعي التنازلي

التكرار التجميعي التنازلي	فئات الوزن
100	أكبر من 800
92	أكبر من 1000
68	أكبر من 1200
28	أكبر من 1400
10	أكبر من 1600
0	أكبر من 1800
100	المجموع

ثم رسم المضلع التكراري التجميعي التنازلي وكما يلي:



شكل (5-3-8) المضلع التكراري التجميعي التنازلي لبيانات الجدول (5-3-4)

(5-3-2) العرض البياني في حالة المتغير النوعي

(1) العرض الدائري (Pie Chart)

ويتمثل في دائرة مقسمة إلى أجزاء متعددة كل جزء يقابل زاوية مركزية تتناسب مع التكرارات المقابلة لكل خاصية (صفة) من الخصائص المدروسة، ولتحقيق ذلك نضيف عموداً إلى جدول المعطيات يحتوي على الزوايا المركزية المقابلة لكل تكرار.

بما أن زوايا الدائرة (الزاوية القطرية) أو الزاوية حول نقطة = 360°

لذا نحسب الزاوية المركزية لكل خاصية أو صفة بالطريقة الآتية:

تكرار الخاصية

$$\text{الزاوية المركزية} = 360^\circ \times \frac{\text{تكرار الخاصية}}{\text{التكرار الكلي}}$$

التكرار الكلي

نرسم دائرة ومن نقطة المركز نرسم نصف قطرها، وباستعمال المنقلة نرسم الزوايا المركزية لكل خاصية بحيث تكون مجموع الزوايا 360° . بعد ذلك نعطي كل زاوية لون يميزها عن البقية.

مثال 7: يبين الجدول الآتي عدد النخيل لكل صنف في مزرعة. المطلوب عرض البيانات بطريقة العرض الدائري.

جدول (5-3-5) جدول التوزيع التكراري لأصناف أشجار النخيل

العدد	اصناف النخيل
1000	خستاوي
400	زهدي
700	برحي
1200	مكتوم
300	خضراوي
3600	المجموع

الحل:

1- نحسب الزوايا المركزية لكل صنف من النخيل وكالاتي

$$100^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{1000}{3600}\right) = \text{خستاوي}$$

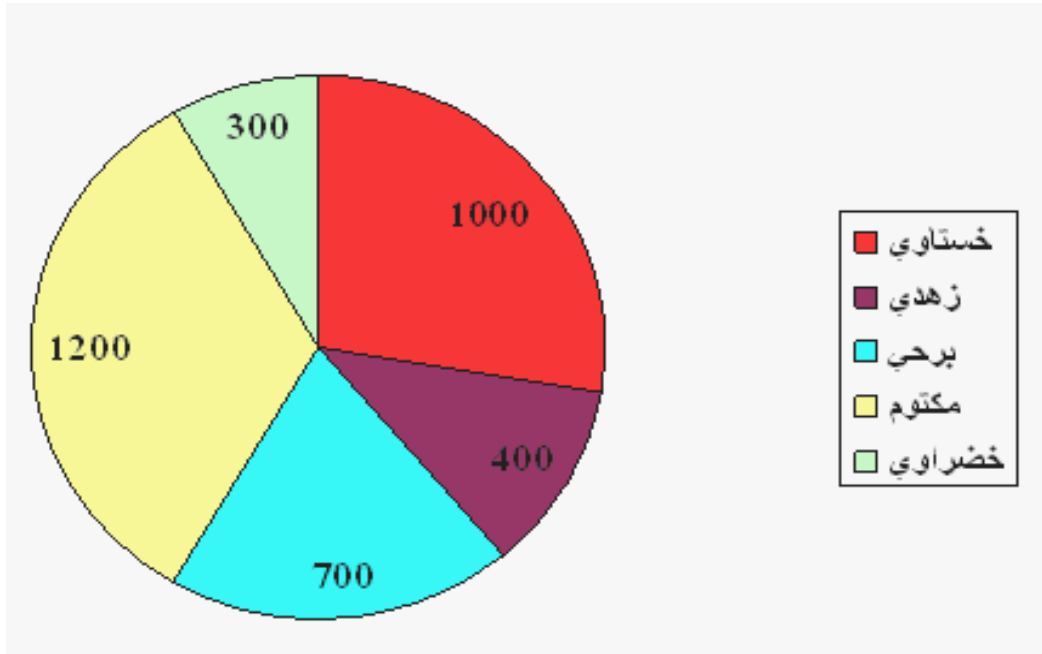
$$40^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{400}{3600}\right) = \text{زهدي}$$

$$70^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{700}{3600}\right) = \text{برحي}$$

$$120^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{1200}{3600}\right) = \text{مكتوم}$$

$$30^\circ = 360^\circ \times \left(\frac{300}{3600}\right) = \text{خضراوي}$$

2- نرسم دائرة ثم باستعمال المنقلة نرسم الزوايا المركزية اعلاه فنحصل على الشكل الاتي



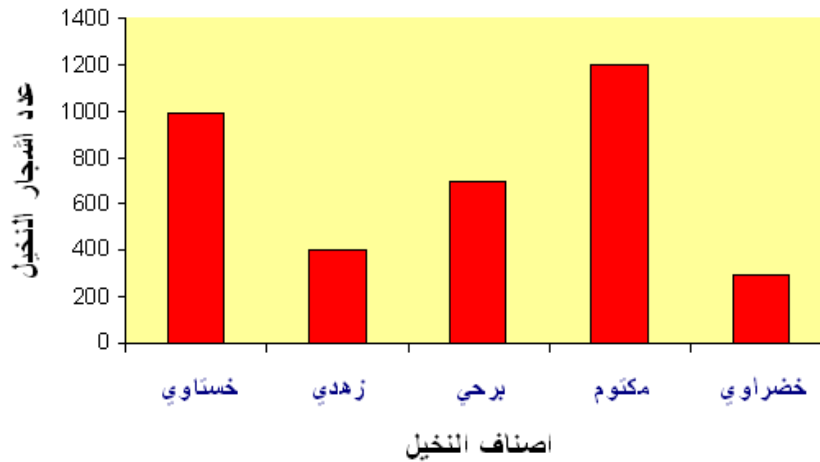
شكل (5-3-9) التمثيل الدائري لبيانات الجدول (5-3-5)

(2) الأعمدة (Bar Chart)

وهو عبارة عن مجموعة من الأعمدة المتجاورة ذات القواعد المتساوية إلا أن ارتفاعها يتناسب مع تكرار كل خاصية، كما أن هذه الأعمدة تكون متباعدة بمسافات متساوية.

مثال 8: أعرض بيانات المثال السابق باستخدام الأعمدة البسيطة

الحل:



الشكل 5-3-10. تمثيل بيانات أصناف أشجار النخيل بطريقة الأعمدة البسيطة

تمرين (5-1)

1. البيانات الآتية تبين عدد الغيابات التي سجلها طلبة أعدادية الزراعة في محافظة بابل في الفصل الأول من السنة.

9	5	4	1	6	4	3	5	7	3	2	6	2	5	3
2	3	3	4	9	5	5	4	0	0	5	1	2	5	0
1	2	2	2	1	1	1	5	3	0	2	3	2	1	4

المطلوب: (1- حدد المجتمع الأحصائي والمتغير الأحصائي ونوعه؟

(2) لخص البيانات هذه في جدول إحصائي؟

2. البيانات الآتية تمثل رواتب 50 شخصاً في إحدى المؤسسات شهرياً (بالآلاف الدنانير).

375	370	360	200	250
230	180	180	180	170
120	120	120	350	280
520	520	520	460	110
100	90	390	380	380
375	440	420	420	400
400	400	390	650	640
360	360	360	350	630
620	620	620	620	640
600	600	540	540	460

المطلوب: لخص البيانات أعلاه في جدول توزيع تكراري من 7 فئات متساوية الطول؟

3. فيما يلي درجات 60 طالب في الامتحان النهائي لمادة الرياضيات

40	85	36	56	83	67	45	92	72	88	55	71
35	29	94	86	47	25	93	87	64	73	61	55
67	60	57	87	72	29	51	89	67	65	48	59
56	92	87	79	59	43	76	74	62	88	27	90
76	58	40	71	69	53	81	66	70	75	81	34

المطلوب: (1) احسب المدى للبيانات أعلاه.

(2) تفرغ البيانات أعلاه في جدول توزيع تكراري لفئات متساوية الطول.

(3) لخص البيانات في جدول توزيع تكراري.

(4) ارسم المدرج التكراري.

(5) ارسم المضلع التكراري.

(6) ارسم المنحنى التكراري.

4. مستخدماً بيانات السؤال الثالث: -

(1) كون جدول توزيع تكراري متجمع تصاعدي.

(2) كون جدول توزيع تكراري متجمع تنازلي.

(3) ارسم المضلع التكراري التصاعدي.

(4) ارسم المضلع التكراري التنازلي.

5. البيانات الآتية تمثل توزيع منتسبي أحد المصانع حسب التخصص.

التخصص	عدد العاملين
خبير	5
رئيس مهندسين	10
مهندس	30
عامل ماهر	40
عامل غير ماهر	20
اداري	15

المطلوب:

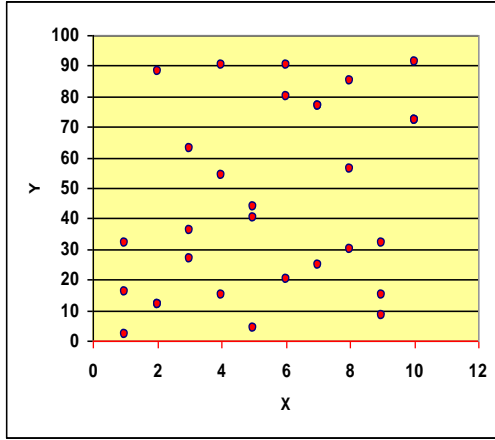
(1) ما نوع المتغير؟

(2) مثل البيانات بطريقة التمثيل الدائري.

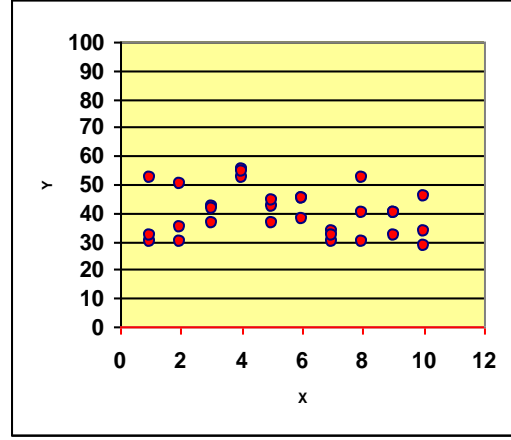
6. مثل البيانات في السؤال الخامس بطريقة الأعمدة البسيطة.

(5-4) التشتت او الاختلاف

تشتت بيانات ظاهرة ما يقصد به درجة أو مقدار التفاوت أو الاختلاف بين مفردات هذه الظاهرة، وتعتبر بيانات الظاهرة متجانسة عندما تكون قيمتها قريبة من بعضها البعض ونقول في هذه الحالة أنها غير مشتتة. أما إذا كانت بيانات الظاهرة متباعدة وغير متجانسة فنقول إن مفردات الظاهرة مشتتة وغير مركزة. ومقاييس التشتت هي مقاييس لمدى تشتت قيم المشاهدات عن وسطها. وعلى ذلك يمكننا ان نتخذ مقدار التشتت كدليل على تجمع القيم وقربها من بعضها أو على تفرقها وتباعدها عن بعضها، وهكذا يكون لدينا مقياس لمقدار تجانس المجموعات الاحصائية أو عدم تجانسها، ويمكن ملاحظة الشكل (4-5) والاستدلال عن الفرق بين المجموعات الاحصائية في مدى تجانسها.



(b)



(a)

الشكل (5-1)

درجة تشتت البيانات الاحصائية تشتت (a) > تشتت (b)

وكما تعرفنا في البند السابق على مقاييس النزعة المركزية والتي اعطتنا فكرة اولية عن التوزيع التكراري فمن الواضح ان وصف التوزيع التكراري بأحد تلك المقاييس يعطينا فكرة ناقصة عن حقيقة المجموعة التي يمثلها التوزيع ، كما ان المقارنة بين المجموعات بناءً على متوسطها فقط تكون ناقصة، كذلك ان لم تكن مضللة فعلاً. فقد يحدث ان يتساوى متوسطا مجموعتين ومع ذلك تكون مفرداتها مختلفة كل الاختلاف ، وربما تكون مفردات المجموعة الاولى قريبة في القيمة من متوسطها اي مركزة حوله بينما تكون مفردات المجموعة الثانية بعيدة في القيمة وتختلف كثيراً عن متوسطها فيكون بعضها اكبر منه بكثير والآخر أقل منه بكثير. وكما يتضح من مقارنة المجموعتين الآتيتين:

7	11	9	13	8	10	12	المجموعة الاولى
3	8	7	2	31	4	15	المجموعة الثانية

فالوسط الحسابي لكلا المجموعتين يساوي 10 ولكن المجموعة الاولى تبدو أكثر تجانساً . من أجل ذلك لجأ الإحصائيون إلى استخدام مقاييس أخرى لقياس مدى تجانس البيانات، أو مدى انتشار البيانات حول مقياس النزعة المركزية، ويمكن استخدامها في المقارنة بين مجموعتين أو أكثر من البيانات، وسميت بمقاييس التشتت أو الاختلاف. وهناك عدة مقاييس للتشتت أهمها :

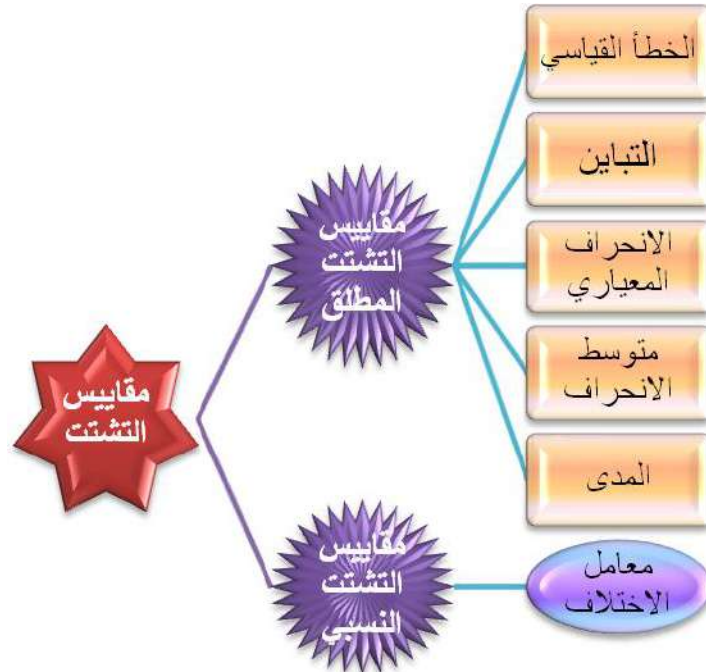
أولاً – مقاييس التشتت المطلق

أي التي تكون وحداتها نفس وحدات القيم الاصلية وأهمها:

- 1- المدى (Range)
- 2 – متوسط الانحراف (Mean Deviation)
- 3- الانحراف المعياري (Standard Deviation)
- 4- التباين (Variance)
- 5- الخطأ القياسي (Standard Error)

ثانياً- مقاييس التشتت النسبي

إن مقياس التشتت النسبي له أهميته عند مقارنة تشتت مجموعتين (أو أكثر) تختلف في وحدات القياس لقيمتها. لأن مقاييس التشتت النسبي تكون خالية من وحدات القياس ، وأهم مقياس للتشتت النسبي هو معامل الاختلاف (Coefficient of Variation).



[5-4-1] -: مقاييس التشتت المطلق

[5-4-1-1] المدى (Range)

تعريف المدى
المدى لمجموعة من القيم هو الفرق بين أعلى قيمة وأقل قيمة في تلك المجموعة من القيم
ويرمز له R

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

يتميز هذا المقياس بسهولة حسابه واعطائه فكرة سريعة ومبسطة عن درجة تشتت قيم المجموعة. إلا ان نقطة ضعفه انه يهمل جميع قيم المجموعة فيما عدا القيمتين العليا والدنيا وكثير التأثير بالقيم المتطرفة. ونتيجة لنقطة الضعف هذه فانه يعجز عن تمييز درجات تشتت المجموعات بشكل حازم بدليل أن قيمة المدى لمجموعة القيم في الجدول ادناه تساوي $25 - 8 = 17$

8	25	23	20	23	21
---	----	----	----	----	----

وهي مساوية لقيمة المدى لمجموعة القيم أدناه والتي تساوي $30 - 13 = 17$

13	23	30	16	20	18
----	----	----	----	----	----

رغم الاختلاف الواضح في درجتي تشتت المجموعتين . لهذا السبب فان هذا المقياس محدود الاستخدام مقارنة بالمقاييس التي تأخذ بنظر الاعتبار جميع القيم وتقيس تشتتها عن قيمة معينة كاساس لقياس التشتت والتي عادة ما تكون المتوسط الحسابي.

مثال 1:- تم زراعة 9 وحدات تجريبية بمحصول القمح ، وتم تسميدها بنوع معين من الأسمدة الفسفورية، وفيما يلي بيانات كمية الإنتاج من القمح بالطن / هكتار

4.8	6.21	5.4	5.18	5.29	5.18	5.08	4.63	5.03
-----	------	-----	------	------	------	------	------	------

والمطلوب حساب المدى.

الحل :
$$R = x_{\max} - x_{\min}$$
$$R = 6.21 - 4.63 = 1.58$$

اي ان المدى للمحصول يساوي 1.58 طن / هكتار



مثال 2:- الجدول الآتي يمثل مراقبة التقلبات السعرية لقيم اسهم شركتتين (A و B) بالدينار، اوجد قيمة المدى لسعري السهمين في الشركتين

40	30	35	24	32	38	الشركة A
34	47	45	49	48	50	الشركة B

الحل:

$R = 40 - 24 = 16$	المدى للشركة A
$R = 50 - 34 = 16$	المدى للشركة B

وهذا يعني ان المدى للتغير في اسعار اسهم الشركتين متساوي
[5-4-1-2] الانحراف المتوسط (*Mean Deviation*)

تعريف الانحراف المتوسط

إذا كانت لدينا n من المشاهدات x_1, x_2, \dots, x_n فان الانحراف المتوسط لها هو متوسط الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات (أي أهمل الإشارة) عن وسطها الحسابي ويرمز له $M. D$

$$M. D = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

ولأن مقاييس التشتت هي مقاييس لقوة تجمع البيانات حول بعضها، وحيث أن التجمع يكون حول القيم المتوسطة، فإنه إذا كان مقدار الاختلاف بين القيم ومتوسطها كبيراً دل ذلك على أن التشتت كبير والعكس صحيح. وحيث أن مجموع الاختلافات (الانحرافات) عن المتوسط يساوي صفراً، فإنه لو حسبنا القيم المطلقة لمقدار الاختلاف عن المتوسط يكون متوسط هذه الاختلافات مقياساً مناسباً لمقدار التشتت، يسمى هذا المقياس بالانحراف المتوسط. ويمتاز هذا المقياس بأنه يأخذ جميع القيم وسهل الحساب ولكن يعاب عليه بأنه يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال 3:- اوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية



4	6	5	8	2
---	---	---	---	---

الحل: الخطوة الاولى:- استخراج الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 5 + 8 + 2}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

الخطوة الثانية:- ايجاد انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي (مع أهمل الاشارة)

x_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $
4	4-5=-1	1
6	6-5=1	1
5	5-5=0	0
8	8-5=3	3
2	2-5=-3	3
المجموع		8

$$M.D = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$M.D = \frac{8}{5} = 1.6 \quad \text{الانحراف المتوسط}$$

مثال 4:-



جد قيمة الانحراف المتوسط للبيانات الآتية التي تمثل أوزان عشرة من رؤوس اللهانة بالكيلوغرام

2.8	2.3	1.7	2.0	1.2	2.5	2.0	1.8	2.2	1.5
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

الحل:

المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{(2.8)+(2.3)+(1.7)+(2.0)+(1.2)+(2.5)+(2.0)+(1.8)+(2.2)+(1.5)}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

2.8	2.3	1.7	2.0	1.2	2.5	2.0	1.8	2.2	1.5	القيم
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	المتوسط الحسابي
0.8	0.3	-0.3	0	-0.8	0.5	0	-0.2	0.2	-0.5	الانحراف المتوسط
0.8	0.3	0.3	0	0.8	0.5	0	0.2	0.2	0.5	مطلق الانحراف المتوسط

$$M.D = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$\therefore M.D = \frac{(0.8)+(0.3)+(0.3)+(0)+(0.8)+(0.5)+(0)+(0.2)+(0.2)+(0.5)}{10}$$

$$M.D = \frac{3.6}{10} = 0.36 \text{ الانحراف المتوسط}$$

[3-1-4-5] التباين (Variance)

للتغلب على مشكلة الاشارات عند جمع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي والتي تؤدي دائماً لان يكون مجموع انحرافات أي عينة عن وسطها الحسابي يساوي صفرًا. وبدلاً من اخذ القيم المطلقة للانحرافات اي بدون اشارات فأنا نستطيع ان نتغلب على ذلك بطريقة اخرى وهي بتربيع قيم الانحرافات وبذلك تصبح جميعها موجبة. اي نحصل على مجموع مربعات الانحرافات والتي نرسم لها (SS) إختصاراً للعبارة (Sum of squares) وعلى ذلك فان

$$S.S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

ولكي نأخذ بنظر الاعتبار حجم العينة حتى يمكن مقارنة العينات المختلفة الاحجام فأنا نقسم مجموع مربعات الانحرافات على $(n - 1)$ عند حساب التباين للعينة ونسمي $(n - 1)$ بدرجات الحرية. ويرمز لتباين العينة بالرمز (S^2) .

ملاحظة:- وجد إن قسمة مجموع مربعات الانحرافات على $(n - 1)$ بدلاً من (n) يعطي تقييم أفضل خاصة إذا كان حجم العينة صغيراً ((أقل من 30 مشاهدة)).

تعريف التباين
هو متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

ويحسب تباين العينة بإحدى العلاقتين الآتيتين :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}}{n-1}$$

ونظراً لأننا عند حساب التباين قمنا بتربيع الانحرافات فان قيمة التباين تكون مقاسة بمربع الوحدات المستخدمة في قياس المشاهدات. فإذا كانت المشاهدات مقاسة بالسنتيمتر فان التباين يكون بالسنتيمتر المربع ولا توجد مشكلة في ذلك ، ولكن المشكلة عندما تكون وحدات المشاهدات كالأوزان بالكيلو غرام أو عدد الاطفال في الأسر أو عدد الموظفين في شركة ما، فالتباين عنده يقاس بالكيلو المربع او الطفل المربع او الموظف المربع وهذه كلها غير ذات معنى. والحل لتلك المشكلة هي ارجاع الوحدات الى اصلها وذلك بأخذ الجذر التربيعي للتباين لنحصل على ما يسمى بالانحراف المعياري (S) والذي سوف يكون مقاساً بالوحدات الاصلية.

مثال 5:- اخذت عينة مؤلفة من 6 نباتات بطاها وحسبت عدد الثمار بالنبات الواحد فكانت كالاتي ، احسب تباين عدد الثمار بالنبات .

5	4	8	7	10	8
---	---	---	---	----	---

الحل :- الطريقة الاولى :-

الخطوة الاولى : حساب الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_6}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 4 + 8 + 7 + 10 + 8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

الخطوة الثانية :

عدد الثمار	8	10	7	8	4	5
$x_i - \bar{x}$	1	3	0	1	-3	-2
$(x_i - \bar{x})^2$	1	9	0	1	9	4

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{1 + 9 + 0 + 1 + 9 + 4}{6 - 1} = \frac{24}{5} = 4.8$$

الطريقة الثانية :-

x_i	x_i^2
8	64
10	100
7	49
8	64
4	16
5	25
$\sum x_i = 42$	$\sum x_i^2 = 318$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1} = \frac{318 - \frac{1764}{6}}{6 - 1} = \frac{318 - 294}{5} = 4.8$$

مثال 6:- اخذت عينة مؤلفة من 10 من أشجار العنب وحسب كمية الحاصل بالكيلوغرام



وكما يلي ، أحسب التباين؟

5	11	9	14	10	15	12	6	8	10
---	----	---	----	----	----	----	---	---	----

الحل :-

الطريقة الاولى:- اولاً نستخرج الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10}}{10}$$
$$= \frac{5 + 11 + 9 + 14 + 10 + 15 + 12 + 6 + 8 + 10}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

x_i	5	11	9	14	10	15	12	6	8	10
$x_i - \bar{x}$	-5	1	-1	4	0	5	2	-4	-2	0
$(x_i - \bar{x})^2$	25	1	1	16	0	25	4	16	4	0

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 25 + 1 + 1 + 16 + 0 + 25 + 4 + 16 + 4 + 0 = 92$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{92}{9} = 10.22$$

الطريقة الثانية:-

x_i	5	11	9	14	10	15	12	6	8	10	$\sum xi = 100$
$(x_i)^2$	25	121	81	196	100	225	144	36	64	100	$\sum (x_i)^2 = 1092$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1}$$

$$S^2 = \frac{1092 - \frac{100^2}{10}}{10 - 1} = \frac{1092 - 1000}{9} = \frac{92}{9} = 10.22$$

[5-4-1-4] الانحراف المعياري (Standard Deviation)

يعتبر الانحراف المعياري من أهم المقاييس الإحصائية للتشتت، وهو الأكثر استخداما في النظريات والقوانين الإحصائية، لأنه يعطي فكرة سليمة ومنطقية عن ظاهرة التشتت.

و لحساب الانحراف المعياري للعينة والذي يرمز له بالرمز S نستعمل العلاقة الآتية:-

تعريف الانحراف المعياري
يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي لمتوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

اي ان الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين $S = \sqrt{S^2}$

ويمتاز الانحراف المعياري بسهولة حسابه وشموله على جميع قيم المشاهدات لذا فهو يعتبر من ادق معايير التشتت الاحصائية ، وله نفس وحدات القياس للظاهرة قيد الدراسة. ويعاب عليه تأثره بالقيم المتطرفة للبيانات ولا يمكن حسابه للقيم الوصفية.

مثال 7:- اخذت عينة مؤلفة من خمسة بساتين وحسبت اشجار الزيتون في كل منها فكانت كما يلي، احسب الانحراف المعياري لعدد اشجار الزيتون.

9	7	10	6	8
---	---	----	---	---

الحل: نحسب الوسط الحسابي لقيم المتغير

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_5}{5}$$

x_i	9	7	10	6	8
$x_i - \bar{x}$	1	-1	2	-2	0
$(x_i - \bar{x})^2$	1	1	4	4	0

$$= \frac{9 + 7 + 10 + 6 + 8}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

ثم نحسب التباين :-

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{1 + 1 + 4 + 4 + 0}{4}$$

$$s^2 = \frac{10}{4} = 2.5$$

ثم نأخذ الجذر التربيعي للتباين للحصول على الانحراف المعياري

$$s = \sqrt{2.5} = 1.581$$

مثال 8:- اخذت عينة مكونة من 8 أبقار وحسبت كمية انتاج الحليب بالـ (كغم) في اليوم الواحد فكانت النتائج كما يلي:



x_i	10	12	8	9	5	15	13	8
-------	----	----	---	---	---	----	----	---

احسب الانحراف المعياري للكمية المنتجة من الحليب .

الحل: الطريقة الاولى:-

1- حساب المتوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8}{8}$$

$$= \frac{10+12+8+9+5+15+13+8}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

x_i	10	12	8	9	5	15	13	8
$(x_i - \bar{x})^2$	0	4	4	1	25	25	9	4

-2

$$\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 0 + 4 + 4 + 1 + 25 + 25 + 9 + 4 = 72$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{72}{7}} = \sqrt{10.29} = 3.21$$

الطريقة الثانية:-

x_i	10	12	8	9	5	15	13	8	$\sum x_i = 80$
$(x_i)^2$	100	144	64	81	25	225	169	64	$\sum (x_i)^2 = 872$

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 80 \quad , \quad \sum_{i=1}^8 (x_i)^2 = 872$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{872 - \frac{(80)^2}{8}}{7}} = \sqrt{\frac{872 - 800}{7}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$$

$$= \sqrt{10.29} = 3.21$$

5-4-1-5 الخطأ المعياري (الخطأ القياسي) (Standard Error)

كانت مقاييس التشتت السابقة عبارة عن إحصاءات لقياس تشتت المفردات داخل العينة وكان الانحراف المعياري هو أهم تلك المقاييس إذ أنه يقيس انحراف مفردات العينة عن متوسطها الحسابي.

تعريف

الخطأ المعياري هو عبارة عن تقدير للانحراف المعياري للمتوسطات الحسابية المحسوبة من عدد العينات العشوائية الكبيرة الحجم (30 فردا فأكثر) المأخوذة من مجتمع واحد متجانس.

استعمالات الخطأ المعياري:

- 1- تعتبر قيمة الخطأ المعياري كمقياس لدرجة الاعتماد على متوسط العينة، بمعنى أن المتوسط الذي تكون قيمة الخطأ المعياري له صغيرة يمكن الاعتماد عليه أكثر من المتوسط الذي تكون قيمة الخطأ المعياري له كبيرة.
- 2- يفيد استعمال الخطأ المعياري في تحديد حجم العينة.
- 3- يعطي الخطأ المعياري فكرة عن متوسط المجتمع ، فلقد وجد أن متوسطات العينات العشوائية الكبيرة المأخوذة من مجتمع واحد متجانس تتوزع توزيعا معتدلا تقريبا ، حتى ولو لم تكن مفردات المجتمع نفسها

معدلة التوزيع . وبذلك تكون النقطة على المنحني المعتدل التي تتركز حولها متوسطات العينات أحسن تقديراً لمتوسط المجتمع.

4- يمكن استعمال الخطأ المعياري لمقارنة متوسطين مختلفين لمعرفة حقيقة الفرق بينهما.

طريقة حساب الخطأ المعياري: يرمز للخطأ المعياري أو القياسي بالرمز $S_{\bar{x}}$ ويحسب بإحدى العلاقتين الآتيتين :-

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} \quad \text{او} \quad S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

مثال 9:- جد الخطأ المعياري للبيانات في الجدول الآتي :-

6 9 6 4 5

الحل :- (1) إيجاد الانحراف المعياري

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(6^2 + 9^2 + 6^2 + 4^2 + 5^2) - \frac{(6 + 9 + 6 + 4 + 5)^2}{5}}{5-1}}$$

$$S = \sqrt{\frac{194 - \frac{30^2}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{194 - \frac{900}{5}}{4}} = \sqrt{\frac{194 - 180}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{14}{4}} = \sqrt{3.5} = 1.87$$

2) إيجاد الخطأ المعياري

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.87}{\sqrt{5}} = \frac{1.87}{2.236} = 0.836$$

[5-4-2] مقاييس التشتت النسبي

كانت مقاييس التشتت التي ذكرت سابقاً كلها مقاييس مطلقة ، تقدر بدلالة وحدات القياس المستعملة في قياس المتغير الموضوع تحت البحث والدراسة ، سواء كانت هذه الوحدات مقاسة بالسنتيمتر أو المتر أو الكيلو غرام وغيره ، وعلى ذلك فإذا أردنا مقارنة عينتين أو مجتمعين فقد يحول دون ذلك اختلاف وحدات القياس المستعملة في كل منهما. لذا فإن مقاييس التشتت النسبي تكون مناسبة في هذا المجال لكونها خالية من وحدات القياس ، واهم مقاييس التشتت النسبي معامل الاختلاف والذي سنورد تفاصيله فيما يأتي :-

[5-4-2-1] معامل الاختلاف (Coefficient of Variation)

ان درجة التشتت بين قيم مفردات مجموعة معينة تختلف عادة عن درجة التشتت لمجموعة أخرى، وقد يكون هذا الاختلاف كبيراً او صغيراً. وبناءً على ذلك لا بد من وجود وسيلة لمقارنة درجات التشتت بين المجموعات المختلفة. وخاصة إذا اختلفت هذه المجاميع بوحدات القياس ، وعليه فإن الامر يتطلب الاستعانة بمقياس تشتت يحوّل قيمة الانحراف المعياري الى نسبة مئوية من المتوسط الحسابي وبذلك يأخذ بنظر الاعتبار التفاوت في القياسات الاصلية للبيانات ويتخلص من وحدات القياس ويوصلنا الى نسبة مئوية قابلة للمقارنة ، ويطلق على هذا المقياس بمعامل الاختلاف ويرمز له (C.V) .

تعريف معامل الاختلاف (C.V)

إذا كان S و \bar{X} هما الانحراف المعياري والوسط الحسابي لمجموعة من القيم على التوالي فإن معامل الاختلاف لها يساوي

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \times 100$$

مثال 10:- في إحدى الإحصائيات كانت نتائج الامتحان النهائي لمادتي الرياضيات والكيمياء للصف الرابع العلمي في إحدى المدارس كالاتي



الكيمياء	الرياضيات	
72	80	الوسط الحسابي
6	8	الانحراف المعياري

ففي اي المادتين كان التشتت اكبر؟

الحل :- معامل الاختلاف لمادة الرياضيات $C.V = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$

معامل الاختلاف لمادة الكيمياء $C.V = \frac{6}{72} \times 100 = 8.33\%$

اي ان التشتت في درجات مادة الرياضيات كان اكثر

مثال 11:- اجريت مقارنة صفة ارتفاع النبات بالـ (cm) وكمية الحاصل بالـ (gm) لعينة مكونة من 100 نبات من الذرة الصفراء وكانت النتائج كما يلي:



الارتفاع	الحاصل	
200	800	الوسط الحسابي
16	36	الانحراف المعياري

قارن بين تشتت الصفتين.

الحل:- معامل الاختلاف لارتفاع النبات $C.V = \frac{16}{200} \times 100 = 8\%$

معامل الاختلاف للحاصل $C.V = \frac{36}{800} \times 100 = 4.5\%$

اي ان تشتت صفة ارتفاع النبات اكبر من تشتت كمية الحاصل.

تمارين (2-5)

1. احد المقاييس الآتية هو مقياس للتشتت



المنوال	الوسيط	المدى	الوسط الحسابي
---------	--------	-------	---------------



2. احد المقاييس الآتية ليس مقياساً للتشتت

التباين	المنوال	معامل الاختلاف	الانحراف المتوسط
---------	---------	----------------	------------------

3.

لكل من المجموعات الآتية احسب:

(a) المدى

(b) الانحراف المتوسط

(c) التباين

(d) الانحراف المعياري

(e) معامل الاختلاف



(1) $x_i = 3, 6, 8, 10, 4, 5$

(2) $x_i = 1, 8, 9, 5, 12, 8, 0, 7, 3$

(3) $x_i = 5, -3, 2, -4, 10, 12, -8, 11$

4. اوجد القيم المفقودة في جدول البيانات الآتي :-

	\bar{X}	S	$C.V$
1	?	10	20 %
2	40	25	?
3	25	?	5 %